ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Ιωάννης Βανδουλάκης
Χαράλαμπος Καλλιγάς
Νικηφόρος Μαρκάκης
Σπύρος Φερεντίνος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Α΄ Γυμνασίου

ΜΕΡΟΣ Α΄
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ - ΑΛΓΕΒΡΑ
Τόμος 4ος

Μαθηματικά

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ - ΑΛΓΕΒΡΑ
Τόμος 4ος

Γ΄ Κ.Π.Σ. / ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ / Ενέργεια 2.2.1 / Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α: «Αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Δημήτριος Γ. Βλάχος
Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ
Πρόεδρος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης
Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Αναπληρωτής Επιστημ. Υπεύθ. Έργου
Γεώργιος Κ. Παληός
Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου
Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγ. Ινστιτ.

Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.

<u>ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ</u>

Ιωάννης Βανδουλάκης, ***Μαθημ/κός***
Χαράλαμπος Καλλιγάς, ***Μαθημ/κός-Πληροφορικός, Εκπ. Ιδιωτ. Εκπ/σης***
Νικηφόρος Μαρκάκης, ***Μαθημ/κός Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπ/σης***
Σπύρος Φερεντίνος, ***Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών***

<u>ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ</u>

Χαράλαμπος Τσίτουρας,
Αν. Καθηγητής ΑΤΕΙ - Χαλκίδας
Γεώργιος Μπαραλός, ***Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών***
Χαρίκλεια Κωνσταντακοπούλου,
Μαθ/κός Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης

<u>ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ</u>

Κλειώ Γκιζελή, ***Ζωγράφος***
Ιόλη Κυρούση, ***Γραφίστρια***

<u>ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ</u>

Βαρβάρα Δερνελή, ***Φιλόλογος Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπ/σης***

ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ

Αθανάσιος Σκούρας,
Σύμβουλος Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

ΕΞΩΦΥΛΛΟ

Μανώλης Χάρος, *Ζωγράφος*

ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

Στη συγγραφή του πρώτου μέρους (1/3) έλαβε μέρος και η Θεοδώρα Αστέρη, *Εκπ/κός Β/θμιας Εκπ/σης*

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ

Ομάδα Εργασίας
Αποφ. 16158/6-11-06 και 75142/Γ6/11-7-07 ΥΠΕΠΘ

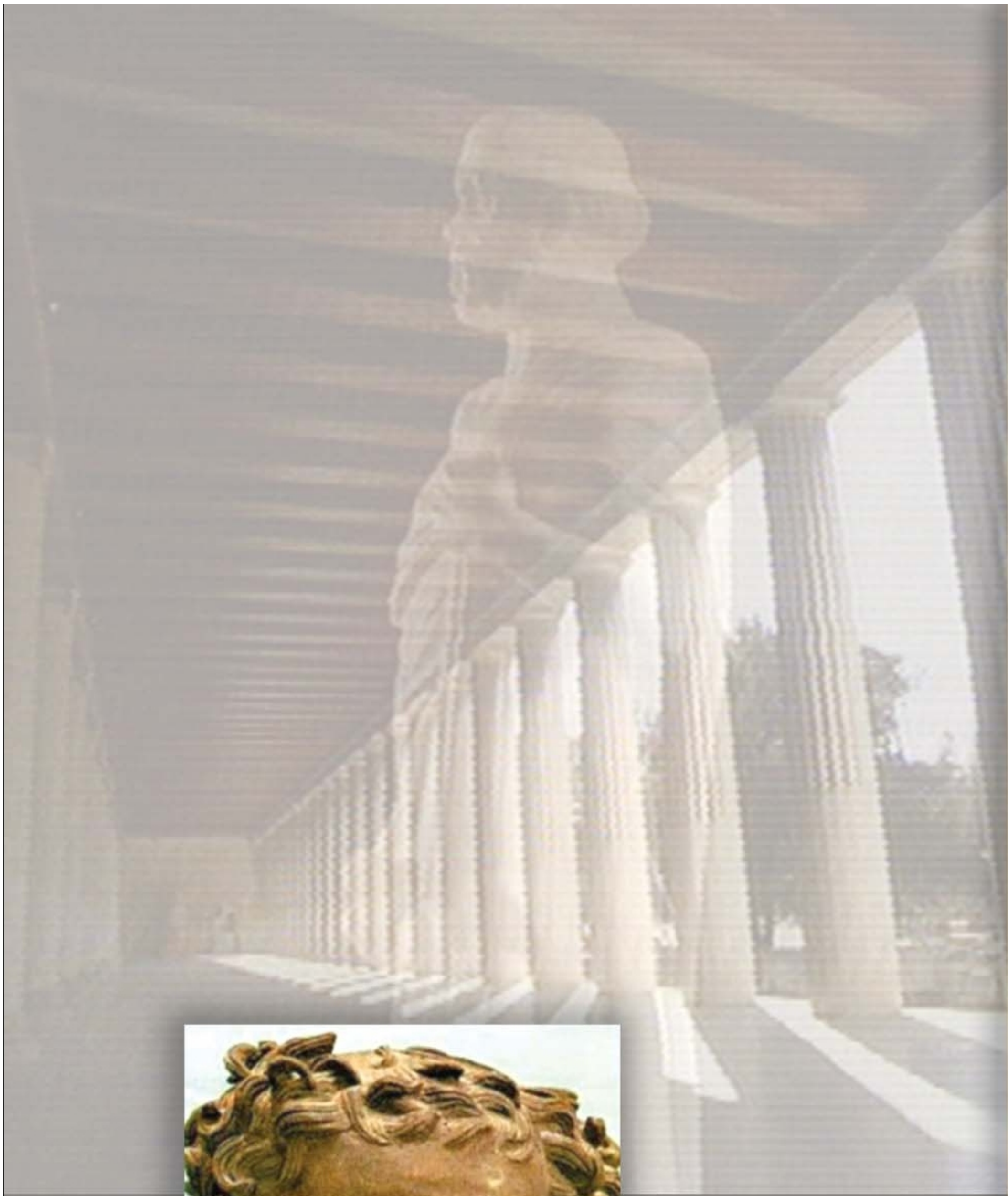
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Ιωάννης Βανδουλάκης
Χαράλαμπος Καλλιγάς
Νικηφόρος Μαρκάκης
Σπύρος Φερεντίνος

Μαθηματικά

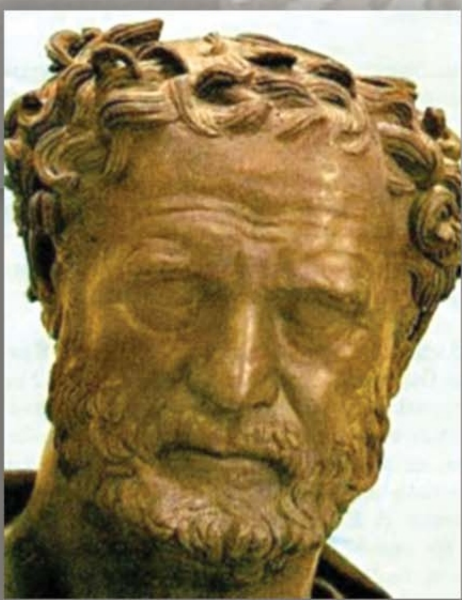
Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ - ΑΛΓΕΒΡΑ
Τόμος 4ος



ΜΕΡΟΣ Α΄

6ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ



ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ Ο ΑΒΔΗΡΙΤΗΣ
(460 – 370 π.Χ.)

Ανάλογα ποσά & αντιστρόφως ανάλογα ποσά

6.1 Παράσταση σημείων στο επίπεδο

- *Σχεδιάζω ένα σύστημα ημιαξόνων*
- *Βρίσκω τις συντεταγμένες ενός σημείου*
- *Βρίσκω ένα σημείο όταν δίνονται οι συντεταγμένες του*

6.2 Λόγος δύο αριθμών - Αναλογία

- *Κατανοώ την έννοια του λόγου και την έννοια της αναλογίας*
- *Επιλύω εξισώσεις της μορφής $\alpha\chi = \beta$, μέσω αναζήτησης της τέταρτης αναλόγου της σχέσης $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{x}$. Γνωρίζω, ότι γενικά είναι $\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \gamma} \neq \frac{\alpha}{\beta}$*

6.3 Ανάλογα ποσά - Ιδιότητες αναλόγων ποσών

- *Αναγνωρίζω αν υπάρχει αναλογία στη μεταβολή δύο μεγεθών*
- *Συμπληρώνω πίνακες αναλόγων ποσών όταν δίνεται ο λόγος τους*
- *Υπολογίζω το λόγο των δύο αναλόγων ποσών όταν δίνονται οι πίνακές τους*
- *Χρησιμοποιώ το ποσοστό ως ειδική περίπτωση συντελεστή αναλογίας*

6.4 Γραφική παράσταση σχέσης αναλογίας

- *Αναπαριστάνω γραφικά μία σχέση αναλογίας*
- *Διαπιστώνω ότι τα σημεία με συντεταγμένες τα ζεύγη των αντίστοιχων τιμών δύο αναλόγων ποσών βρίσκονται σε μια ημιευθεία με αρχή την αρχή των αξόνων*

6.5 Προβλήματα αναλογιών

- ***Οργανώνω τα δεδομένα ενός προβλήματος αναλογιών σε πίνακα και κατασκευάζω με βάση τον πίνακα αυτόν, όπου κρίνεται απαραίτητο, και την γραφική παράσταση***
- ***Λύνω τα προβλήματα εφαρμόζοντας, όπου κρίνεται απαραίτητο, τις ιδιότητες των αναλόγων ποσών σε δύο πλαίσια: αριθμητικό και γραφικό***

6.6 Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

- ***Διακρίνω εάν δύο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα***
- ***Γνωρίζω ότι το γινόμενο των αντί-στοιχων τιμών δύο αντιστρόφως αναλόγων ποσών είναι σταθερό***
- ***Κατασκευάζω πίνακες αντίστοιχων τιμών αντιστρόφως αναλόγων ποσών***

- ***Παριστάνω με σημεία ενός συστήματος αξόνων τα ζεύγη των αντίστοιχων τιμών δύο αντιστρόφως αναλόγων ποσών και χαράζω την καμπύλη που περνά από αυτά***
- ***Λύνω προβλήματα εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των αντιστρόφως αναλόγων ποσών***

Η «ρητή εντολή»

- *Τι είναι τούτα, τα περίεργα στην οθόνη σας κύριε Πέτρο:* ρώτησαν το μεσόκοπο άντρα που δούλευε απορροφημένος στον υπολογιστή του. Εκείνος σήκωσε τα μάτια και κοίταξε πάνω απ' τα γυαλιά τα παιδιά που μπήκαν χαρούμενα στο γραφείο του.

- *Ο μπαμπάς μας είπε να τον περιμένουμε εδώ,* δικαιολόγησαν την παρουσία τους κοιτώντας με περιέργεια τον υπολογιστή.

- *Θα ξέρετε παιδιά,* είπε ο κύριος Πέτρος, *ότι ο πατέρας σας σχεδιάζει στον υπολογιστή τα κτίρια που κατασκευάζουμε. Εγώ έχω την τεχνική υποστήριξη αυτών των προγραμμάτων. Αυτά που βλέπετε*

όμως στην οθόνη είναι μια απλή οικονομική μελέτη για την κατασκευή. Αν είχατε μάθει στο σχολείο τους ακέραιους και τους ρητούς εύκολα θα καταλαβαίνατε όλα τούτα».

- Ξέρω τους ακέραιους, είπε ο Ιάσονας. *Είναι οι αριθμοί που περιέχουν μόνο ακέραιές μονάδες, δηλαδή δεν είναι κλάσματα. Αλλά οι ρητοί τι είναι: Γιατί τους λέμε έτσι:*

- Πριν προσπαθήσω να σας εξηγήσω, ας δούμε τι αναφέρει και το λεξικό, είπε ο κύριος Πέτρος. Συμβουλεύτηκε ένα χοντρό βιβλίο από τη βιβλιοθήκη και συνέχισε: *«Ρητός είναι ο αριθμός που μπορούμε να τον πούμε. Η λέξη προέρχεται από το αρχαίο “είρηκα" δηλαδή έχω πει που είναι παρακείμενος του “λέγω”. Άρα ρητός είναι ο ειπωμένος αριθμός.*

Τα γεμάτα απορία μάτια των παιδιών τον έκαναν να συνεχίσει: ***«Εκτός από τους ρητούς που είναι οι ακέραιοι και τα γνωστά κλάσματα, υπάρχουν και αριθμοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία, που δεν μπορείς να τους πεις ολόκληρους αφού τα ψηφία τους δεν τελειώνουν ποτέ και ούτε είναι γνωστά. Αυτούς τους αριθμούς τους ονομάζουμε άρρητους και θα τους μάθετε αργότερα στο σχολείο».***

Κοίταξε πάλι το λεξικό και συνέχισε κάπως σκεπτικός. ***«Ομολογώ ότι δεν ήξερα από που προέρχεται η λέξη ρητός, ενώ γνωρίζω το "ρήτορας" ή την έκφραση "ρητή εντολή". Και να σκεφτεί κανείς ότι τόσα χρόνια την αναφέρω στα μαθηματικά…»***

- *Συγνώμη, μηχανικός υπολογι- στών δεν είστε:* ρώτησε με αφοπλιστική αφέλεια ο Ισονας.
- *Ναι, με ειδίκευση στο λογισμικό, που προυποθέτει όμως καλή γνώση μαθηματικών. Σου φαίνεται κάτι περίεργο:* απόρησε ο κύριος Πέτρος.
- *Όχι βέβαια,* βιάστηκε να διορθώ- σει ο Ιάσονας, *αλλά περίμενα ότι θα ψάχνατε τη λέξη στο ηλεκτρονικό λεξικό.*
Ο κύριος Πέτρος χαμογέλασε με την παρατήρηση του Ιάσονα κι ύστερα με πιο σοβαρό ύφος είπε, δείχνοντας τον υπολογιστή:
- Ακούστε παιδιά. Γίνεται συχνά μια παρεξήγηση με τούτο το μηχάνημα Άλλοι το αποφεύγουν γιατί δεν ξέρουν να το χειρίζονται και άλλοι το χρησιμοποιούν περίπου σαν τηλεόραση. Και τα δύο είναι λάθος.

Στον υπολογιστή έχω ηλεκτρονικό λεξικό, αυτό όμως δε σημαίνει ότι θα πάψω να συμβουλεύομαι το βιβλίο. Προτιμώ να χρησιμοποιώ τον υπολογιστή σε ποιο σύνθετες και πιο δημιουργικές εργασίες. Για παράδειγμα θα ήταν σωστό να τον χρησιμοποιήσεις για να σχεδιάσεις ένα στάδιο, αλλά θεωρώ ότι είναι λάθος να παίζεις ποδόσφαιρο στην οθόνη τον υπολογιστή. Το μηχάνημα αυτό δε φτιάχτηκε για να καταργήσει τις δικές μας λειτουργίες, αλλά για να βελτιώσει τη δημιουργική μας σκέψη». Τη συζήτηση διέκοψε ο πατέρας των παιδιών που μπήκε βιαστικά και έδωσε ένα σχέδιο στον κύριο Πέτρο λέγοντας: *«Στο διάγραμμα που θα σχεδιάσεις να φαίνεται καθαρά ότι το κόστος είναι ανάλογο με το εμβαδόν».*

- Τι σημαίνει "ανάλογο" κύριε Πέτρο; **ρώτησε απορημένα η Αθηνά. Εκείνος χωρίς να απαντήσει απευθύνθηκε μειδιώντας στον πατέρα τους.**
- Σου δίνω "ρητή εντολή", να φέρνεις πιο συχνά τα παιδιά στο γραφείο. Πάντα κάτι θα μαθαίνουμε από τις ερωτήσεις τους.

Α.6.1. Παράσταση σημείων στο επίπεδο

Στα προηγούμενα τοποθετήσαμε τους φυσικούς αριθμούς πάνω σε μια ευθεία. Τώρα θα ανοίξουμε λίγο τον ορίζοντά μας και από την ευθεία πάμε στο επίπεδο. Είναι εύκολο. Αρκεί να πάρουμε δύο κάθετες ευθείες και έχουμε μπροστά μας ένα επίπεδο που έχει πολλά να μας δείξει. Ας τα δούμε ξεκινώντας με μια παρτίδα σκάκι.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Σε μια εφημερίδα δημοσιεύτηκε μια παρτίδα σκάκι, όπως είναι αυτή που φαίνεται στη παρακάτω σκακιέρα.

- ***Δώσε ονομασίες για τις θέσεις των πιονιών που βρίσκονται στη***

συγκεκριμένη σκακιέρα και φτιάξε ένα πίνακα με αυτές.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Η θερμοκρασία ενός ασθενούς κατά την τρίτη ημέρα νοσηλείας του, φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

7:30	9:00	10:00	11:00	12:30	13:30
37,2	37,7	37,9	38,6	39,2	38,2

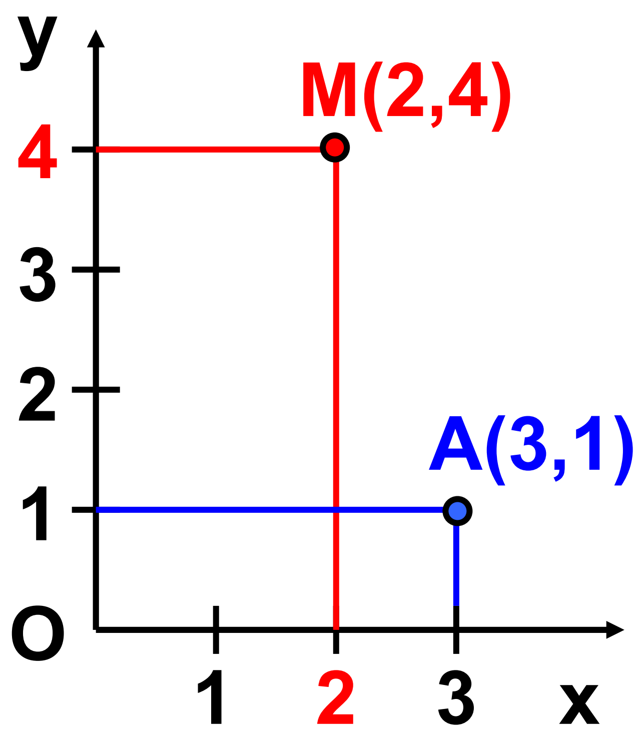
14:30	16:00	18:00	20:00	21:30	23:00
37,2	37	36,6	37,8	38,2	37,1

- ***Μπορείς να παραστήσεις αυτόν τον πίνακα με έναν άλλο τρόπο;***
- ***Πώς θα μπορούσαμε να έχουμε μια εκτίμηση της θερμοκρασίας του ασθενούς τις ώρες που δεν μετριέται αυτή;***

Μαθαίνουμε

Προκειμένου να προσδιορίσουμε τη θέση ενός σημείου στο επίπεδο: Σχεδιάζουμε δύο κάθετες μεταξύ τους ημιευθείες Οx και Οy. Πάνω σε κάθε μια απ' αυτές ορίζουμε την ίδια μονάδα μέτρησης. Αυτές οι ημιευθείες αποτελούν ένα σύστημα ημιαξόνων.

- **Ο <u>ημιάξονας</u> Οx λέγεται ημιάξονας των <u>τετμημένων</u> ή <u>ημιάξονας των x</u>.**
- **Ο <u>ημιάξονας Οy</u> λέγεται ημιάξονας των <u>τεταγμένων</u> ή <u>ημιάξονας των y</u>.**
- **Το <u>σημείο Ο</u> ονομάζεται <u>αρχή των ημιαξόνων</u>**



◆ Το 3 είναι η τετμημένη του σημείου Α

◆ Το 1 είναι η τεταγμένη του σημείου Α

● Η τετμημένη και η τεταγμένη του σημείου Α ονομάζονται συντεταγμένες του Α και συνήθως όταν θέλουμε να αναφερθούμε στο σημείο Α, γράφουμε Α(3,1).

● Το ζεύγος (3,1) του οποίου ο πρώτος αριθμός 3 είναι η τετμημένη του σημείου Α και ο δεύτερος αριθμός 1 είναι η τεταγμένη του σημείου Α, λέγεται διατεταγμένο ζεύγος, επειδή έχει σημασία η διάταξη, δηλαδή η σειρά, με την οποία γράφονται οι αριθμοί που το αποτελούν.

◆ Με το σύστημα αυτό αντιστοιχούμε σε κάθε σημείο Α ένα ζεύγος αριθμών (3,1), δηλαδή ένα διατεταγμένο

ζεύγος, οι αριθμοί του οποίου ονομάζονται συντεταγμένες του σημείου.

◆ Αντίστροφα, κάθε διατεταγμένο ζεύγος θετικών αριθμών π.χ. το (2,4) αντιστοιχεί σε ένα σημείο Μ του επιπέδου.

● Το σύστημα ημιαξόνων που χρησιμοποιήσαμε λέγεται ορθοκανονικό, γιατί οι ημιάξονες τέμνονται κάθετα (ορθο-) και έχουμε ορίσει πάνω τους την ίδια μονάδα μέτρησης (-κανονικό).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να σχεδιάσεις ένα ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων, με μονάδα το 1 cm και να τοποθετήσεις τα σημεία Α(2,3), Β(3,2), Γ(4,5), Δ(5,5), Ε(1,4), Ζ(7,3), Η(7,2), Θ(6,2), 1(6,0), Κ(0,5). Τι παρατηρείς για τα σημεία I και Κ; Πού βρίσκονται αυτά; Μπορείς να

γενικεύσεις τις παρατηρήσεις σου για τα σημεία που έχουν τετμημένη ή τεταγμένη το μηδέν;

2. Σε ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων να τοποθετήσεις τα σημεία Α(2,1), Β(1,2), Γ(2,3) και Δ(3,2). Τι σχήμα είναι το ΑΒΓΑ; Αν τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Κ, ποιες είναι οι συντεταγμένες του;

3. Γράψε πέντε διατεταγμένα ζεύγη σημείων, των οποίων η τετμημένη τους είναι ίση με την τεταγμένη τους. Μπορείς να τα τοποθετήσεις, σε ένα ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων; Τι παρατηρείς;

4. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τμήμα ενός πίνακα απουσιών ανά τρίμηνο, για τους μαθητές της Α΄ Γυμνασίου ενός σχολείου. Κάθε θέση

	A	B	C	D	E
1	Τάξη Α΄ Γυμνασίου				
2	Πίνακας Απουσιών Μαθητών				
3	Τρί-μηνο	Είδος Απουσιών			
4		Δ = Δικαιολογημένες	ΑΝΤΩ-	ΒΕΛ-	ΓΕΩΡ-
5		Α = Αδικαιολόγητες	ΝΙΟΥ	ΛΙΟΥ	ΓΙΟΥ
6	1ο	Α	10	0	3
7		Δ	6	8	20
8	2ο	Α	0	6	12
9		Δ	5	6	4
10	3ο	Α	3	0	19
11		Δ	18	2	3
12	Σύ-	Α			
13	νολο	Δ			

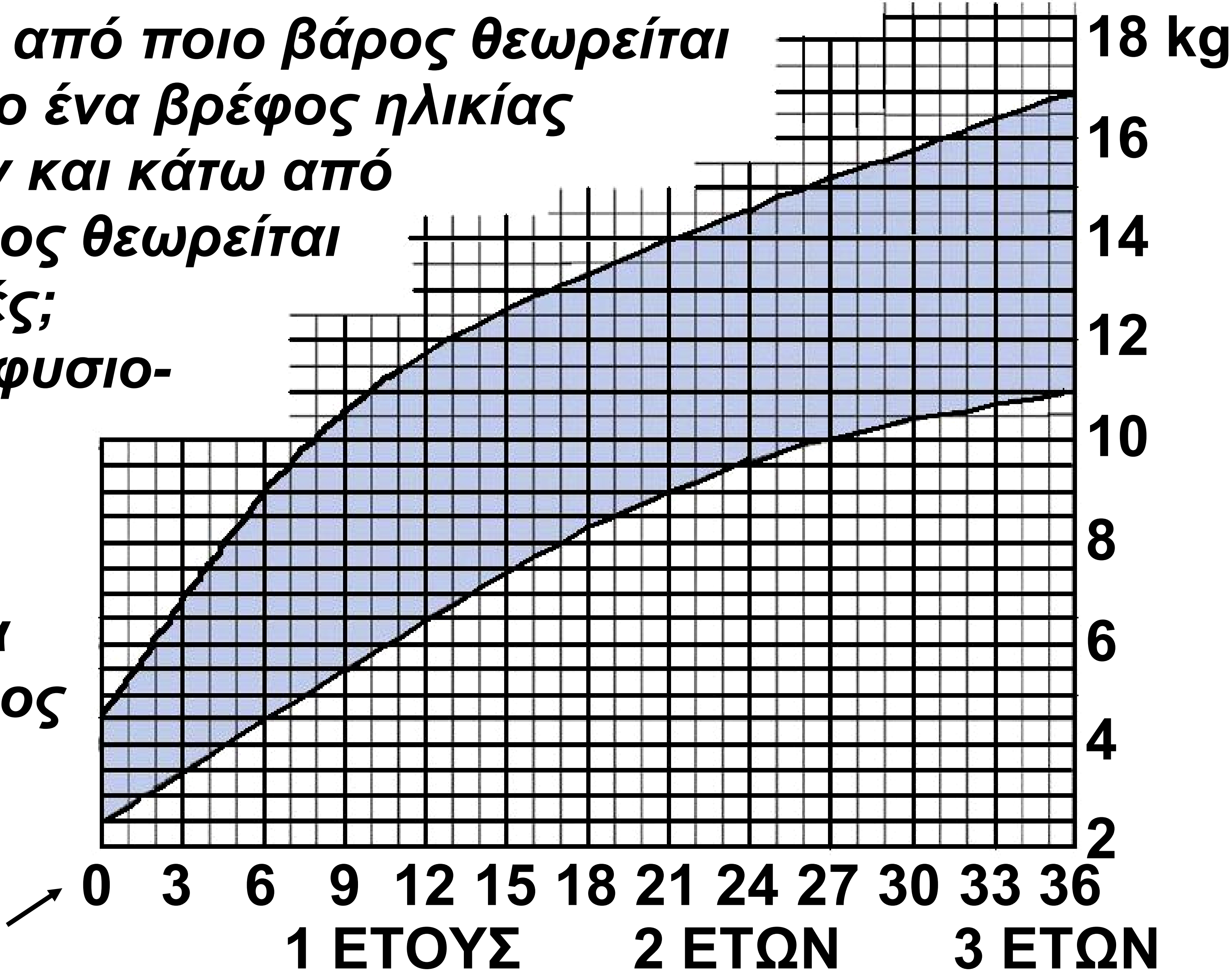
του πίνακα ορίζεται από το ζεύγος (γράμμα στήλης, αριθμός γραμμής).
(α) Σε ποια θέση βρίσκεται το όνομα του μαθητή Γεωργίου;
(β) Τι αντιπροσωπεύει ο αριθμός που βρίσκεται στη θέση C8;
(γ) Ποιος αριθμός πρέπει να γραφεί στη θέση D12 και ποιος στη θέση E13;

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

Σε κάθε βιβλιάριο υγείας παιδιού, που παρέχει το Υπουργείο Υγείας και Πρόνοιας, υπάρχει το παρακάτω διάγραμμα, το οποίο παριστάνει την καμπύλη αύξησης του βάρους των βρεφών από 0 έως 3 ετών. Παρατήρησέ το προσεκτικά και απάντησε στα παρακάτω ερωτήματα:
(α) Ποιο είναι το μικρότερο και ποιο το μεγαλύτερο φυσιολογικό βάρος ενός βρέφους ηλικίας 15 μηνών;

(β) Πάνω από ποιο βάρος θεωρείται υπέρβαρο ένα βρέφος ηλικίας 18 μηνών και κάτω από ποιο βάρος θεωρείται λιποβαρές;

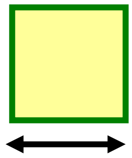
(γ) Είναι φυσιολογικό το βάρος των 7,5 κιλών για ένα βρέφος 9 μηνών;

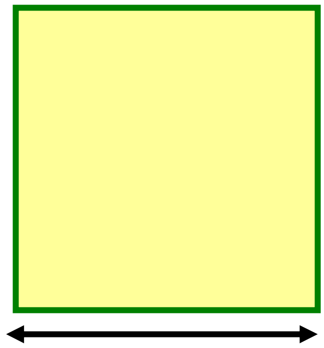


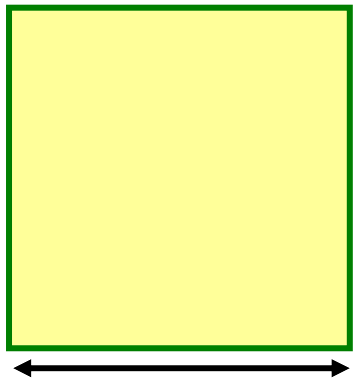
Α.6.2. Λόγος δύο αριθμών – Αναλογία

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Έχουμε τα παρακάτω τρία τετράγωνα:







1,5 ***4*** ***4,5***

- ***Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:***

Πλευρά τετραγώνου	**1,5 cm**	**4 cm**	**4,5 cm**
Περίμετρος τετραγώνου			

- ***Εξήγησε πώς προκύπτουν οι αριθμοί της δεύτερης σειράς.***
- ***Βρες για κάθε τετράγωνο το κλάσμα πλευρά προς περίμετρο.***
- ***Ποιο είναι το συμπέρασμα που βγάζεις;***

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Χρησιμοποιούμε τη φωτογραφική μηχανή για να απεικονίσουμε εικόνες αντικειμένων.

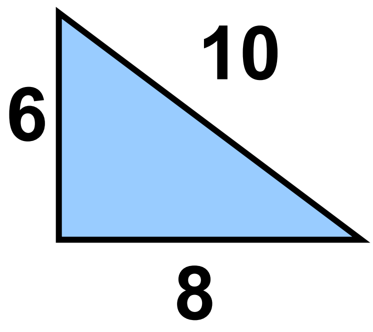
Οι εικόνες αυτές δείχνουν τα πραγματικά αντικείμενα σε σμίκρυνση.

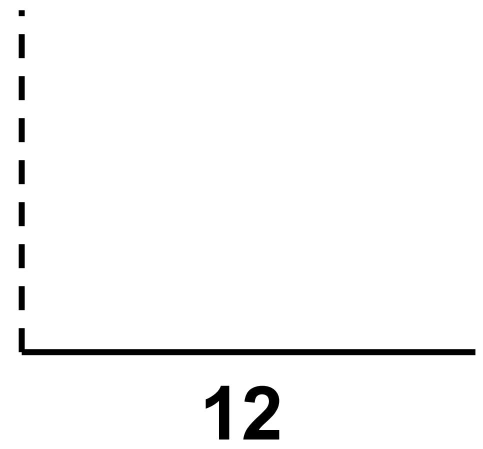
Στη φωτογραφία το ύψος ενός παιδιού είναι 2 cm ενώ γνωρίζουμε ότι το πραγματικό του ύψος είναι 1,65 m = 165 cm.

- ***Πόση θα είναι τότε η σμίκρυνσή του στη φωτογραφία;***

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

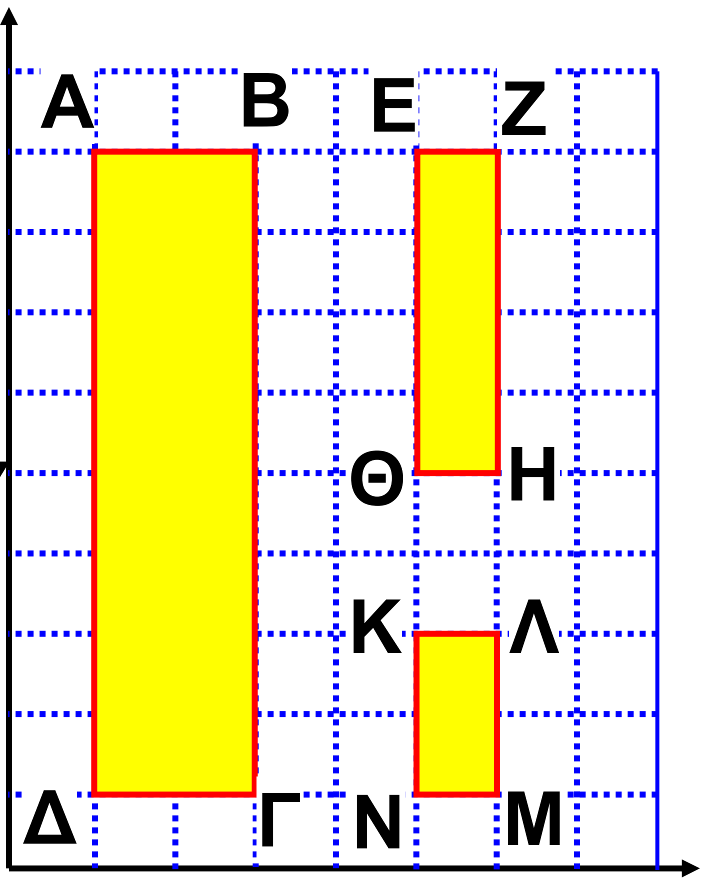
Σχεδίασε το τρίγωνο του παρακάτω σχήματος και μετά σχεδίασέ το μεγεθυσμένο, ώστε η πλευρά μήκους 8 cm να έχει νέο μήκος 12 cm.





ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4η

Σύγκρινε τους λόγους: $\dfrac{AB}{K\Lambda}$ ***και*** $\dfrac{B\Gamma}{\Lambda M}$ **.**
Τι παρατηρείς;



- ***Τι συμπέρασμα βγάζεις για το λόγο των περιμέτρων των ορθογώνιων παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ και ΚΛΜΝ.***

Μετά σύγκρινε τους λόγους: $\dfrac{AB}{EZ}$ **και** $\dfrac{B\Gamma}{ZH}$ **.**
Τι παρατηρείς;

➢ ***Τι συμπέρασμα βγάζεις για το λόγο των περιμέτρων των ορθογωνίων παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ.***

Μαθαίνουμε

- **Λόγος δύο ομοειδών μεγεθών, που εκφράζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης, είναι το πηλίκο των μέτρων τους.**
- **Η ισότητα λόγων ονομάζεται αναλογία.**
- **Δύο σχήματα λέγονται όμοια όταν το ένα αποτελεί σμίκρυνση ή μεγέθυνση του άλλου.**
- **Ο λόγος της απόστασης δύο σημείων μιας εικόνας ενός αντικειμένου προς την πραγματική απόσταση των δύο αντίστοιχων σημείων του αντικειμένου, ονομάζεται κλίμακα.**

► Αν οι λόγοι των αντιστοίχων πλευρών δύο παραλληλογράμμων είναι ίσοι, τότε αυτοί θα είναι ίσοι και με το λόγο των περιμέτρων τους.

► Κάθε σχέση αναλογίας $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση $α \cdot δ = β \cdot γ$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Μετρούμε μια απόσταση, σε χάρτη, με κλίμακα 1:10.000.000 και τη βρίσκουμε ίση με 2,4 cm. Ποια είναι η πραγματική απόσταση των δύο σημείων;

Λύση

Αφού δίνεται η κλίμακα 1:10.000.000, στο 1 cm του χάρτη αντιστοιχούν 10.000.000 cm στην πραγματικότητα.

Συνεπώς, αν τα 2,4 cm του χάρτη αντιστοιχούν σε x cm στην πραγματικότητα θα έχουμε: $\frac{2,4}{x} = \frac{1}{10.000.000}$

Επομένως ισχύει ότι:

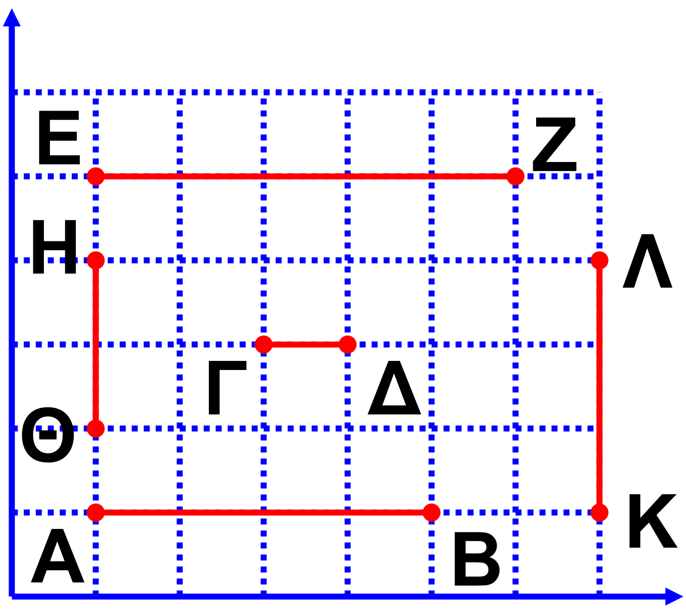
$1 \cdot x = 2,4 \cdot 10.000.000$ **ή**

$x = 24.000.000 \text{ cm} = 240.000 \text{ m} =$

$= 240 \text{ Km}.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να βρεις τους λόγους των διαφόρων ευθύγραμμων τμημάτων που είναι στο σχέδιο.



(α) $\frac{AB}{ΓΔ}, \frac{EZ}{HΘ}, \frac{KΛ}{AB}, \frac{AB}{KΛ}, \frac{HΘ}{EZ}, \frac{ΓΔ}{AB}$

(β) $\frac{ΓΔ}{EZ}, \frac{HΘ}{KΛ}, \frac{AB}{AB}, \frac{EZ}{ΓΔ}, \frac{KΛ}{HΘ}, \frac{ΓΔ}{ΓΔ}$

2. Δίνεται το ορθογώνιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος. Να σχεδιάσεις ένα άλλο ορθογώνιο με πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ορθογωνίου αυτού, έτσι ώστε ο λόγος των αντίστοιχων πλευρών τους να είναι: 2:1.

3. Σε μια φωτογραφία το ύψος ενός ανθρώπου είναι 4 cm, ενώ το πραγματικό το ύψος είναι 1,76 m. Πόσο έχουν σμικρυνθεί όλα τα αντικείμενα της φωτογραφίας;

4. Ένας προβολέας διαφανειών προβάλλει το κείμενο μιας διαφάνειας στον απέναντι τοίχο. Αν ένα “Α” έχει ύψος 7 mm στη διαφάνεια και 4,2 cm στον τοίχο, ποια είναι η μεγέθυνση που δίνει ο προβολέας;

5. Η σύνθεση μιας μπλούζας είναι 80% βαμβάκι και το υπόλοιπο πολυεστέρας. Αν η μπλούζα ζυγίζει 820 gr, πόσα γραμμάρια ζυγίζουν τα νήματα του πολυεστέρα που περιέχει;

6. Να συμπληρώσεις τον πίνακα:

Κλίμακα	*Μήκος σε σχέδιο*	*Πραγματικό μήκος*
1 : 5	4 cm	
3 : 8		24 cm
1 : 30	12 cm	
	2 cm	10 cm
1 : 100	3,5 cm	

7. Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι x + 2 και x. (α) Να γράψεις τη σχέση που συνδέει την περίμετρο Π του ορθογωνίου με το x.

(β) Να συμπληρώσεις τον πίνακα:

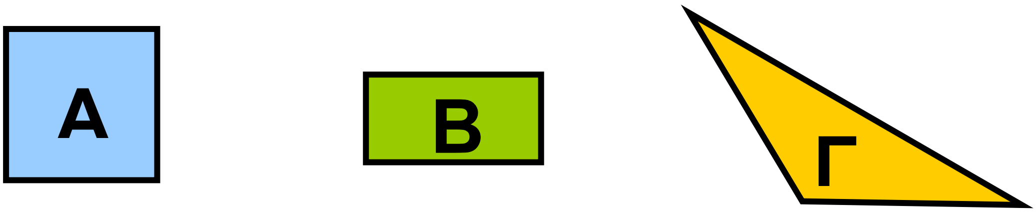
x		2		4
Π	8		16	

8. Αν οι διαστάσεις ενός δωματίου, σε ένα σχέδιο με κλίμακα 1 : 250, είναι 3 x 5, οι πραγματικές διαστάσεις του δωματίου θα είναι ….. x …. .

9. Αν ανακατέψουμε 2 κιλά κόκκινο χρώμα και 3 κιλά κίτρινο χρώμα, φτιάχνουμε μια συγκεκριμένη απόχρωση του πορτοκαλί. Αν ανακατέψεις 5 κιλά κόκκινο χρώμα και 6 κιλά κίτρινο, θα πάρεις την ίδια απόχρωση; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

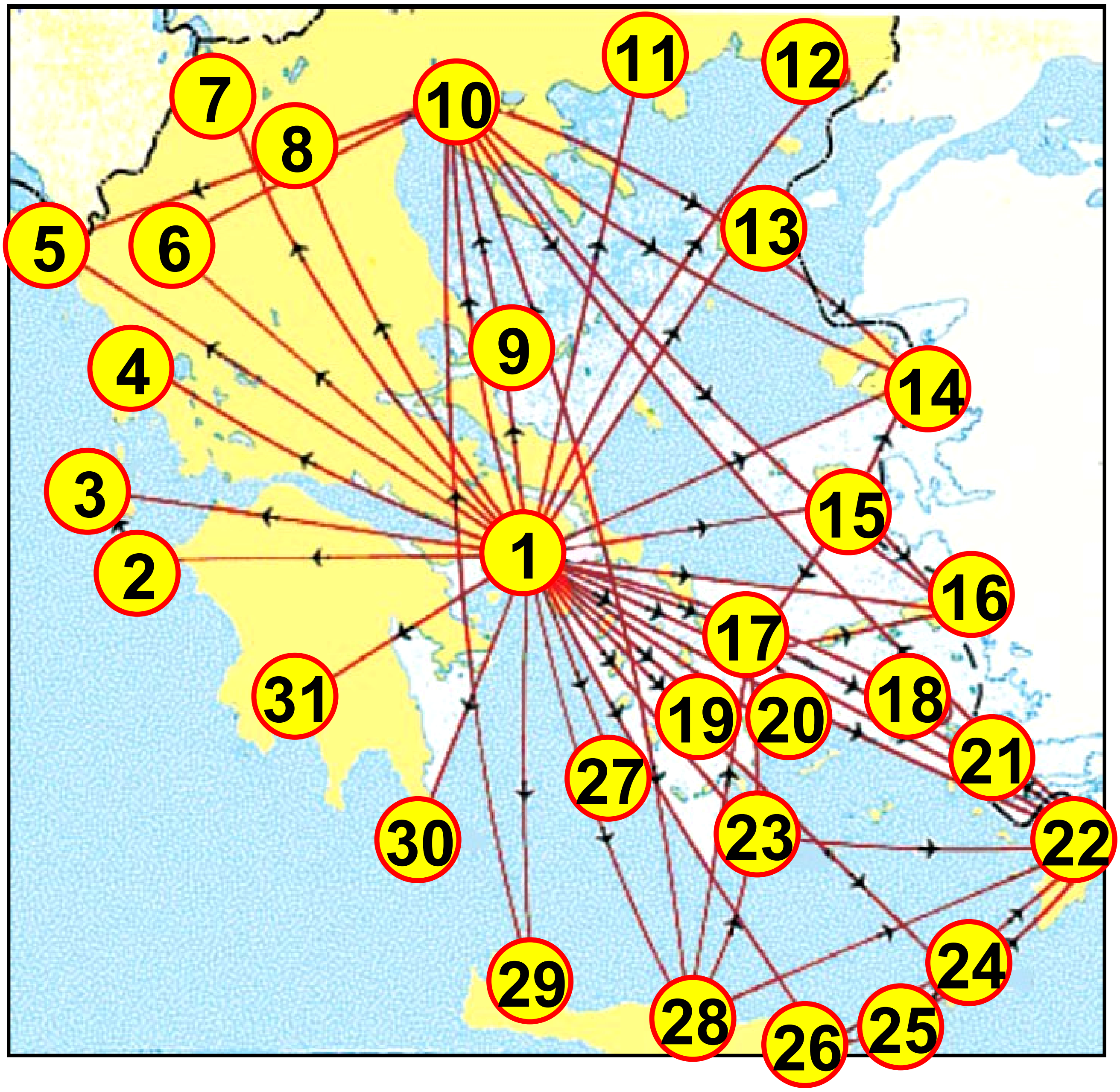
1. ***Σχεδίασε τα σχήματα σε μιλιμετρέ χαρτί:***
(α) Το τετράγωνο Α με κλίμακα 9 : 1
(β) Το παραλληλόγραμμο Β με κλίμακα 12 : 1
(γ) Το τρίγωνο Γ με κλίμακα 7 : 1.



2. ***Όταν ο Κώστας έκλεισε τα δώδεκα χρόνια είχε το ένα τρίτο της ηλικίας της μητέρας του. Όταν θα γίνει είκοσι χρόνων, ο λόγος των δύο ηλικιών τους θα παραμείνει ο ίδιος;***

3. Να ***υπολογίσεις μερικές από τις απ' ευθείας αποστάσεις των πόλεων που συνδέονται με αεροπορική γραμμή, έχοντας***

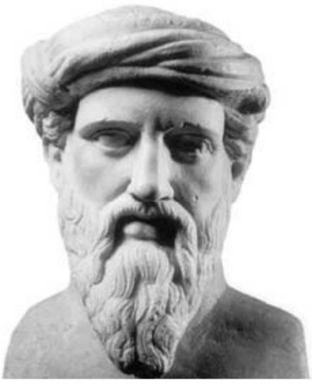
υπόψη ότι η κλίμακα του παρακάτω χάρτη είναι 1:60.000.000 και να δημιουργήσεις ένα πίνακα χιλιομετρικών αποστάσεων για τις πόλεις αυτές.



1	ΑΘΗΝΑ	17	ΜΥΚΟΝΟΣ
2	ΖΑΚΥΝΘΟΣ	18	ΛΕΡΟΣ
3	ΑΡΓΟΣΤΟΛΙ	19	ΠΑΡΟΣ
4	ΑΚΤΙΟ	20	ΝΑΞΟΣ
5	ΚΕΡΚΥΡΑ	21	ΚΩΣ
6	ΙΩΑΝΝΙΝΑ	22	ΡΟΔΟΣ
7	ΚΑΣΤΟΡΙΑ	23	ΣΑΝΤΟΡΙΝΗ
8	ΚΟΖΑΝΗ	24	ΚΑΡΠΑΘΟΣ
9	ΣΚΙΑΘΟΣ	25	ΚΑΣΟΣ
10	ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ	26	ΣΗΤΕΙΑ
11	ΚΑΒΑΛΑ	27	ΜΗΛΟΣ
12	ΑΛΕΞΑΝ-ΔΡΟΥΠΟΛΗ	28	ΗΡΑΚΛΕΙΟ
13	ΛΗΜΝΟΣ	29	ΧΑΝΙΑ
14	ΜΥΤΙΛΗΝΗ	30	ΚΥΘΗΡΑ
15	ΧΙΟΣ	31	ΚΑΛΑΜΑΤΑ
16	ΣΑΜΟΣ		

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Οι μαθηματικές έννοιες διαμορφώθηκαν και εξελίχτηκαν παράλληλα με την ανθρώπινη σκέψη. Φυσικά μεγέθη, όπως το βάρος, το μήκος, η επιφάνεια και ο όγκος, έδιναν αφορμές για μέτρηση και για σύγκριση, δηλαδή για λόγους και αναλογίες. Η συστηματική, όμως, μελέτη των εννοιών αυτών άρχισε στην αρχαία Ελλάδα τον 6ο π.Χ. αιώνα.



Ο Πυθαγόρας, που έζησε από το 580 π.Χ. μέχρι πιθανόν το 490 π.Χ., ήταν από τους πρώτους Έλληνες που ασχολήθηκε με τους λόγους και τις αναλογίες των φυσικών αριθμών. Υπάρχει μια παράδοση που αναφέρει τον τρόπο με τον οποίο ο Πυθαγόρας οδηγήθηκε σε αυτήν την έρευνα. Στην Αλεξάν-

δρεια, όπου έζησε αρκετά χρόνια, βρέθηκε μια μέρα κοντά σε κάποιο σιδηρουργείο όπου τέσσερις τεχνίτες κτυπούσαν με τα σφυριά τους ένα πυρακτωμένο μέταλλο. Ο ήχος από τα κτυπήματα ήταν παράξενα μελωδικός. Αυτό κέντρισε την περιέργεια του Πυθαγόρα, που αναζήτησε το λόγο της απροσδόκητης μελωδίας αυτών των ήχων.

Ζήτησε από τους τεχνίτες να εξετάσει τα σφυριά τους. Παρατήρησε ότι το βάρος τους δεν ήταν το ίδιο. Συγκρίνοντας το πιο βαρύ με τα υπόλοιπα, βρήκε τους λόγους $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ ***και*** $\frac{1}{2}$ ***αντίστοιχα. Σκέφτηκε ότι οι λόγοι αυτοί, πιθανόν, να είχαν κάποια σχέση με τους ήχους που άκουσε. Πήρε τότε τέσσερις μεταλλικές χορδές και τις τέντωσε έτσι,***

ώστε τα μήκη τους να έχουν αντίστοιχους λόγους. Δηλαδή, η δεύτερη είχε μήκος ίσο με τα $\frac{3}{4}$ *του μήκους της πρώτης. Η τρίτη* $\frac{2}{3}$ *και η τέταρτη είχε μήκος ίσο με το* $\frac{1}{2}$ *της πρώτης.*

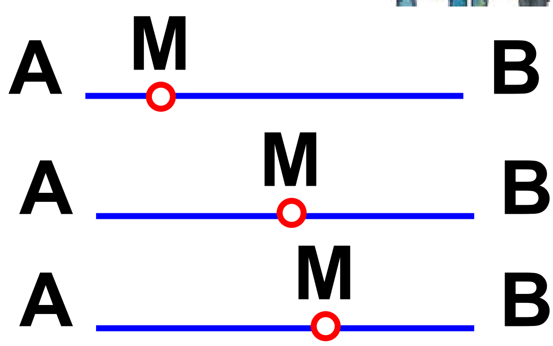
Έκρουσε τις χορδές και διαπίστωσε ότι οι ήχοι είχαν την ίδια μελωδική σχέση με αυτήν που άκουσε στο σιδηρουργείο. Ήταν μια "αρμονία" ήχων (συγχορδία). Με τον τρόπο αυτό, ο Πυθαγόρας ανακάλυψε αρμονικούς τόνους της μουσικής κλίμακας.

Έτσι, οι λόγοι των φυσικών αριθμών ερμήνευαν φαινόμενα που κανείς μέχρι τότε δεν μπόρεσε να συσχετίσει και να εξηγήσει. Ο δρόμος για την αναζήτηση της γνώσης είχε α-

νοίξει. Η έρευνα και η ερμηνεία των φαινομένων της φύσης είχε ήδη δια-μορφώσει στο νου των ανθρώπων ένα νέο κώδικα, μια νέα “παγκό-σμια” γλώσσα: τα μαθηματικά.

ΣΧΕΔΙΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

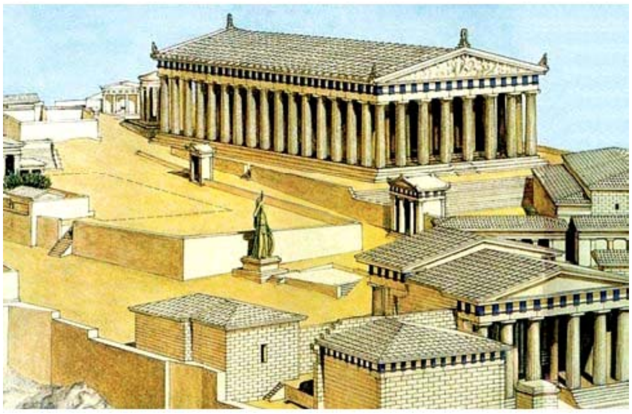
Στο σχήμα βλέπεις τρεις διαφορετικούς τρόπους, με τους οποίους το σημείο Μ χωρίζει ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, ορίζοντας τις αντίστοιχες ανα-λογίες, ανάμεσα στα μέρη του.



$\frac{AB}{AM}$	$\frac{AM}{MB}$
5	$\frac{1}{4}$
2	1
1.618	1.618

Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν επιλέξει τον τρίτο τρόπο ως καλύτερο αισθητικά και κατασκεύα-ζαν όλα τα μνημεία τους χρησιμο-

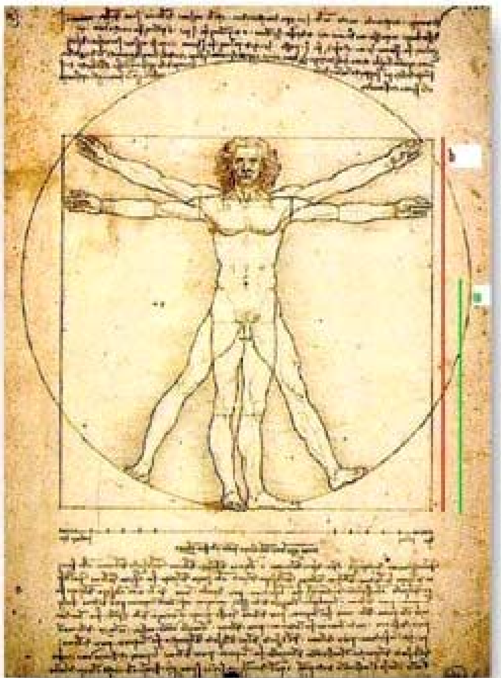
ποιώντας αυτή τη συγκεκριμένη αναλογία στις διαστάσεις τους, όπως π.χ. μεταξύ



των δύο διαστάσεων της βάσης του ναού του Παρθενώνα της Ακρόπολης των Αθηνών. Η αναλογία αυτή ονομάστηκε "χρυσή τομή".

Αλλά και η φύση φαίνεται ότι έχει παρόμοιες προτιμήσεις!

Την αναλογία της "χρυσής τομής" βρίσκουμε ανάμεσα στα μήκη των μελών του ανθρώπινου σώματος, αλλά και στις διαστάσεις των σχημάτων πολλών φυτών και ζώων.



- ***Υπάρχει τέτοια αναλογία στα διάφορα αντικείμενα που παρατηρούμε γύρω μας.***

- ***Προσπάθησε να βρεις την αναλογία της "χρυσής τομής" σε:*** ***(α)*** **μνημεία,** ***(β)*** **ζωγραφικούς πίνακες,** ***(γ)*** **ανθρώπινες κατασκευές,** ***(δ)*** **σχήματα ζώων και φυτών,** ***(ε)*** **ανθρώπινο σώμα** ***και άλλα.***

- ***Συνδέεται η επιλογή της "χρυσής τομής" από τους ανθρώπους στη συγκεκριμένη εποχή με επιστημονικά, αισθητικά, κοινωνικά, θρησκευτικά, οικονομικά, πολιτιστικά κ.λπ. αίτια; Εάν ναι προσπάθησε να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.***

- ***Προσπάθησε να αποτυπώσεις, με τη βοήθεια ίσως και του υπολογιστή, σχέδια των μορφών ή των σχημάτων που έχουν την αναλογία της "χρυσής τομής".***

Α.6.3. Ανάλογα ποσά - Ιδιότητες αναλόγων ποσών

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Σε μια παρέα κάποιος υποστήριζε ότι το βάρος του ανθρώπου είναι ανάλογο του ύψους του. Μετρήθηκαν, λοιπόν, όλοι και έβαλαν στον παρακάτω πίνακα τα αποτελέσματα.

- ***Μπορείς να επιβεβαιώσεις ή να απορρίψεις τον ισχυρισμό αυτό;***

- ***Πώς δικαιολογείς το συμπέρασμά σου;***

Βάρος σε Kg	58	71	56	68
Ύψος σε m	1,60	1,65	1,62	1,72

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Ο μανάβης πουλάει τα καρπούζια προς 0,4 € το κιλό. Μέσα σε μια ημέ-

ρα πούλησε 11 καρπούζια που ζύγιζαν 100 κιλά συνολικά. Ο μανάβης έγραφε, σ' ένα χαρτί, τα λεφτά που εισέπραττε κάθε φορά. Ξέχασε, όμως, μία φορά να το σημειώσει.

- ***Μπορείς να τον βοηθήσεις συμπληρώνοντας τα κενά του παρακάτω πίνακα:***

Τιμή	6€	2,8€	5,2€	3,2€		3,6€
Κιλά						

Τιμή	4,8 €	2,4 €	1,6 €	4,4 €	2 €
Κιλά					

- ***Δικαιολόγησε τα αποτελέσματα των πράξεων που έκανες και προσπάθησε να διατυπώσεις ένα γενικό κανόνα.***

Μαθαίνουμε

● **Δύο ποσά λέγονται <u>ανάλογα</u>, εάν μεταβάλλονται με τέτοιο τρόπο, που όταν οι τιμές του ενός πολλαπλασιάζονται με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου να πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.**

● **Δύο ποσά x και y είναι ανάλογα, όταν οι αντίστοιχες τιμές τους δίνουν πάντα ίδιο πηλίκο:** $\frac{y}{x} = α$ **.**

Το πηλίκο <u>α</u> λέγεται <u>συντελεστής αναλογίας</u>.

► **Τα ανάλογα ποσά <u>x</u> και <u>y</u> συνδέονται με τη σχέση: $y = α \cdot x$ όπου α ο συντελεστής αναλογίας.**

► **Όταν το ποσό <u>y</u> είναι <u>ποσοστό</u> του ποσού χ, τα δύο ποσά συνδέονται με τη σχέση**

$y = \frac{\alpha}{100} \cdot x$ και είναι <u>ανάλογα</u>, με <u>συντελεστή αναλογίας</u> το $\frac{\alpha}{100}$ ή α%.

◆ Η σχέση $y = \alpha \cdot x$ εκφράζει μια αλληλεπίδραση των ποσών x και y. Συγκεκριμένα, ο διπλασιασμός, τριπλασιασμός κ.ο.κ. του ενός ποσού επιφέρει διπλασιασμό, τριπλασιασμό κ.ο.κ. του άλλου ποσού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. ***Να συμπληρωθεί ο πίνακας, αν γνωρίζουμε ότι τα ποσά x και y είναι ανάλογα, με συντελεστή αναλογίας*** $\alpha = \frac{2}{3}$

Λύση

x	0	1	$0{,}3$		
y				$\frac{5}{3}$	3

$y = \alpha \cdot x$ Τα ποσά x και y συνδέονται με τη σχέση: $y = \frac{2}{3} \cdot x$

Άρα για x = 0, η τιμή του y θα είναι

$y = \frac{2}{3} \cdot 0 = 0$

για x = 1 είναι $y = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$

για x = 0,3 είναι $y = \frac{2}{3} \cdot 0{,}3 =$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{30} = 0{,}2$

$x = \frac{y}{\alpha}$ Για $y = \frac{5}{3}$, θα είναι

$x = \frac{5}{3} : \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{6} = 2{,}5$

Για y = 3, θα έχουμε, αντίστοιχα:

$x = 3 : \frac{2}{3} = 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$

2. ***Σε ένα διάλυμα ζάχαρης η περιεκτικότητα σε ζάχαρη είναι 23%.***

Πόσα γραμμάρια ζάχαρης υπάρχουν σε 300 gr διαλύματος;

Λύση

Περιεκτικότητα 23% σε ζάχαρη σημαίνει ότι σε *100 gr* διαλύματος υπάρχουν *23 gr* ζάχαρη. Άρα, τα $\frac{23}{100}$ κάθε ποσότητας, από το διάλυμα, είναι ζάχαρη.

Δηλαδή θα ισχύει: Ποσότητα ζάχαρης = $\frac{23}{100}$ · Ποσότητα διαλύματος

Επομένως: $y = \frac{23}{100} \cdot x$. Η σχέση αυτή κάνει φανερό ότι τα ποσά y και x είναι ανάλογα. Έτσι θα έχουμε: $y = \frac{23}{100} \cdot 300\ gr = 69\ gr$.

3. Ένα πλοίο έχει σταθερή ταχύτητα και καλύπτει απόσταση 80 Km σε 2 ώρες. Σε πόσο χρόνο θα καλύψει απόσταση 2.000 Km;

Λύση

Χρόνος (ώρες)	2	x
Απόσταση (Km)	80	2.000

Επομένως, έχουμε: $\frac{2}{80} = \frac{x}{2.000}$

Άρα: $80 \cdot x = 2 \cdot 2.000$

Επομένως: $80 \cdot x = 4.000$

Οπότε $x = \frac{4.000}{80} = 50$ ώρες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ποια από τα παρακάτω ποσά είναι ανάλογα: Γράψε Σ μπροστά από κάθε σωστή πρόταση και Λ μπροστά από κάθε λάθος.

- ☐ *(α) Ο αριθμός αναψυκτικών και τα χρήματα που κοστίζουν*
- ☐ *(β) Το εμβαδόν του πατώματος και ο αριθμός των πλακών που είναι στρωμένο*
- ☐ *(γ) Ο αριθμός των εργατών και ο χρόνος που απαιτείται για να ολοκληρώσουν ένα έργο.*
- ☐ *(δ) Το μήκος και το πλάτος ενός ορθογωνίου δεδομένου εμβαδού*
- ☐ *(ε) Η ταχύτητα και ο χρόνος που απαιτείται για την κάλυψη μιας απόστασης.*
- ☐ *(στ) Η πλευρά ενός τετραγώνου και το εμβαδόν του.*
- ☐ *(ζ) Η ηλικία ενός ανθρώπου και η περιουσία του.*
- ☐ *(η) Το ποσό που ξοδεύει κάποιος για να αγοράσει λαχεία και το ποσό που κερδίζει.*

2. Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:

(α) Δύο μεγέθη των οποίων οι αντίστοιχες τιμές δίνουν πάντα το ίδιο πηλίκο λέγονται ………………

(β) Αν τετραπλασιάσουμε την τιμή ενός από δύο ανάλογα ποσά και η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού ……………………………………

(γ) Τα ανάλογα ποσά συνδέονται με τη σχέση ……………………………

3. Εξέτασε αν τα ποσά που δίνονται στους παρακάτω πίνακες είναι ανάλογα:

(α)

x	***3***	***5***	***7***
y	***8***	***10***	***12***

(β)

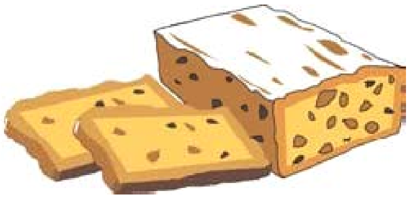
x	***3***	***4***	***6***	***11***
y	***0,9***	***1,2***	***1,8***	***3,3***

4. Στον πίνακα που ακολουθεί, τα ποσά x και y είναι ανάλογα. Υπολόγισε το συντελεστή αναλογίας τους και συμπλήρωσε τον πίνακα.

x	5	0	1	
y	10,05			2

x		3,7	0,61	
y	0,125			0,55

5. Μια συνταγή για κέικ αναφέρει: «4 αυγά, 1 πακέτο φαρίνα, του μισού κιλού, 250 gr βουτύρου, 2 φλιτζάνια ζάχαρη, 1 βανίλια, 1 φλιτζάνι γάλα». Βρες πώς θα γίνει η συνταγή αν θέλεις να φτιάξεις μεγαλύτερη δόση και έχεις 7 αυγά;



6. Δίνεται η αναλογία $\frac{x}{3} = \frac{2}{6}$.

Υπολόγισε το x και το λόγο $\frac{x+2}{3+6}$.
Τι παρατηρείς;

7. Κεφάλαιο 150.000 € κατατέθηκε στην τράπεζα με επιτόκιο 9,5%. Πόσο θα έχει γίνει το κεφάλαιο, μετά από 1 χρόνο;

Α.6.4. Γραφική παράσταση σχέσης αναλογίας

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Η σχέση, μεταξύ δύο ανάλογων ποσών x και y με συντελεστή αναλογίας α = 3, δίνεται από τον τύπο: y = 3 • x

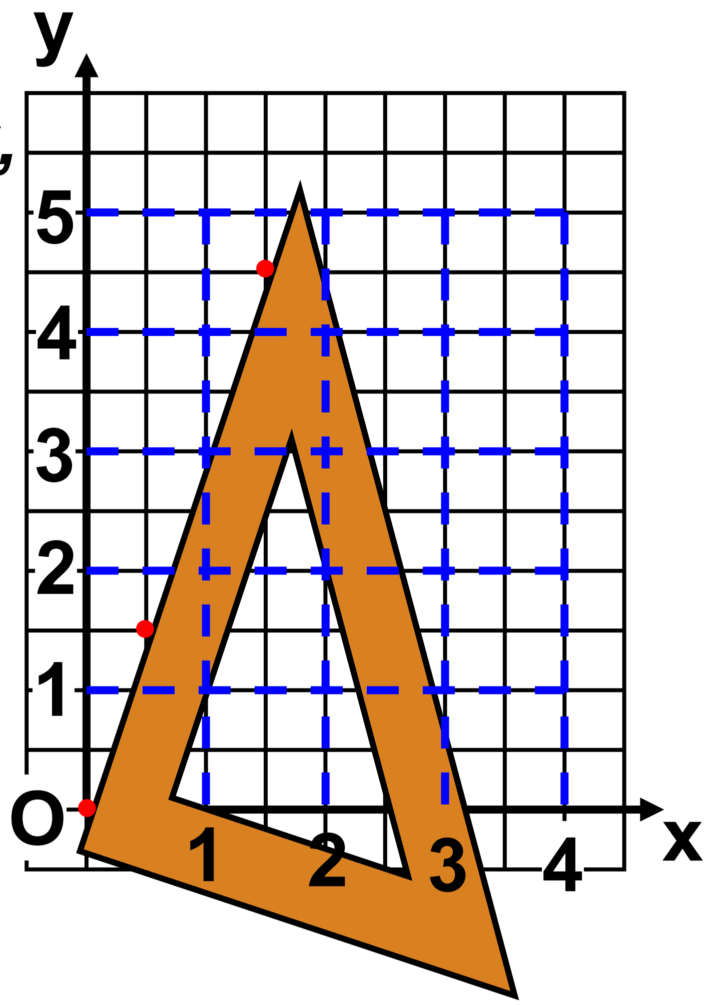
Ο πίνακας αναλογίας των ποσών x και y είναι:

x	***0***	***0,5***	***1,5***							
y	***0***	***1,5***	***4,5***							

- ***Συμπλήρωσε τα κενά του παρακάτω πίνακα και με άλλες τιμές των ανάλογων ποσών x και y.***

- ***Βρες τα σημεία του επιπέδου που αναπαριστούν τα παραπάνω ζεύγη τιμών.***

➢ ***Προσπάθησε να διαπιστώσεις, εάν τα σημεία ανήκουν σε μία ημιευθεία ή όχι.***



➢ ***Η ημιευθεία αυτή περνάει από το σημείο Ο (0,0) δηλαδή την αρχή των ημιαξόνων;***

Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε

Από τα παραπάνω ζεύγη μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι:

► **Τα σημεία που αντιστοιχούν στα ζεύγη τιμών (x, y) δύο ανάλογων ποσών βρίσκονται πάνω σε μία ημιευθεία με αρχή την αρχή Ο (0,0) των ημιαξόνων**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνονται οι πίνακες Α, Β, Γ και Δ. (α) Να γίνει η γραφική απεικόνιση των ζευγών (x, y) των πινάκων στο επίπεδο και (β) να διαπιστωθεί σε ποια περίπτωση αυτά παριστάνουν ποσά ανάλογα.

Α

x	0	1	2	3
y	0	2	1	1,5

Β

x	0	1	2	3
y	1	1,5	2	2,5

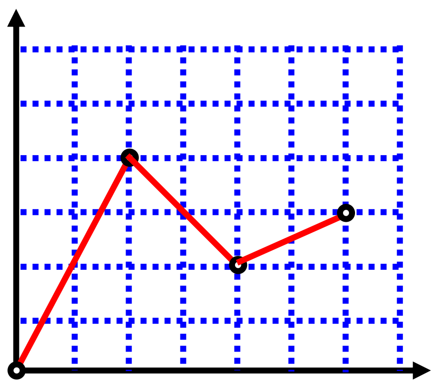
Γ

x	0	1	2	3
y	0	1	2	3

Δ

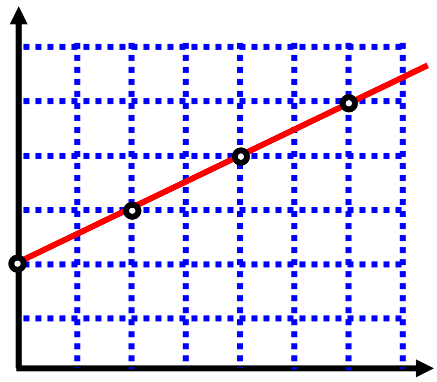
x	0	1	2	3
y	0	0,5	1	1,5

Λύση

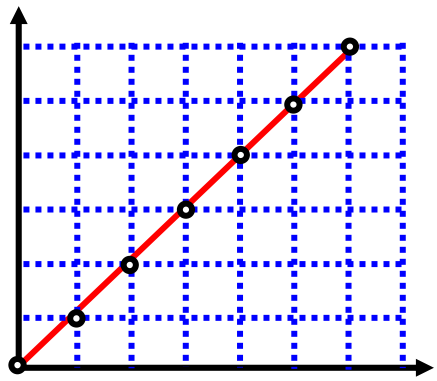


Ο πίνακας Α είναι πίνακας τιμών των x και y που δεν είναι ανάλογα, αφού $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{3}{1,5}$

Ο πίνακας Β είναι πίνακας τιμών των x και y που δεν είναι ανάλογα, αφού $\frac{1}{1,5} \neq \frac{2}{2} \neq \frac{3}{2,5}$

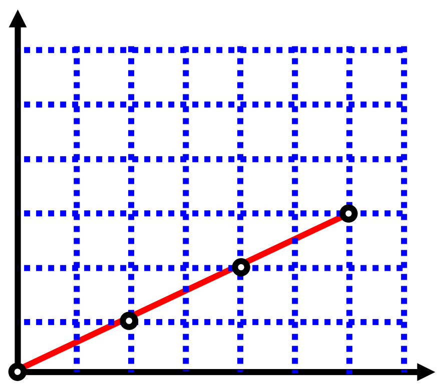


Ο πίνακας Γ είναι πίνακας αναλογίας των ποσών x και y, με συντελεστή αναλογίας το $\alpha = 1$



◆ Η ημιευθεία που την αναπαριστά έχει αρχή την αρχή των αξόνων και είναι η διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$ των ημιαξόνων

Ο πίνακας Δ είναι πίνακας αναλογίας των ποσών x και y με συντελεστή αναλογίας το $\alpha = 0,5$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. ***Δύο ποσά x και y είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας α = 1,5.***

(α) Δημιούργησε έναν πίνακα τιμών των δύο ποσών, ο οποίος να περιέχει τουλάχιστον δύο ζεύγη τιμών.

(β) Βρες τα σημεία που αναπαριστούν τα ζεύγη τιμών του πίνακά σου.

(γ) Σχεδίασε τη γραφική αναπαράσταση της σχέσης αναλογίας των ποσών χ και y, σε ένα ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων.

2. ***Σε κατάλληλο ορθογώνιο σύστημα ημιαξόνων να σχεδιάσεις τις γραφικές παραστάσεις για κάθε μία από τις ακόλουθες σχέσεις αναλογίας:***

(α) $y = \frac{1}{2} \cdot x$, (β) $y = 3 \cdot x$,

(γ) $y = 5{,}5 \cdot x$, (δ) $y = 10 \cdot x$,

(ε) $y = 0{,}01 \cdot x$.

3. Γράψε στο κουτάκι μπροστά από κάθε πίνακα τον αριθμό του τύπου που αντιστοιχεί σ' αυτόν:

Οι τύποι είναι οι εξής:

(1)	$y = 2x + 3$	(5)	$y = 2x + 2$
(2)	$y = 3x$	(6)	$y = 2x + 1$
(3)	$y = 12 : x$	(7)	$y = 4x – 1$
(4)	$y = 2{,}5x$	(8)	$y = 0{,}5x$

(Α)	x	4	7	12
	y	10	17,5	30

(Β)	x	5	7,5	9
	y	11	16	19

(Γ)	x	2	3	10
	y	7	9	23

(Δ)	x	2	4	6
	y	6	3	2

(Ε)	x	2	5	0,5
	y	1	2,5	0,25

(Ζ)	x	0,2	6	10
	y	2,4	14	22

(Η)	x	1	1,2	2,5
	y	3	3,6	7,5

(Θ)	x	0,8	1	1,5
	y	2,2	3	5

4. Ένας καταστηματάρχης αθλητικών ειδών διαθέτει 12.000 € για να αγοράσει φόρμες γυμναστικής, μαγιό και αθλητικά παπούτσια.

Κάθε φόρμα κοστίζει 40 €, κάθε μαγιό 20 € και κάθε ζευγάρι παπούτσια 50 €. (α) Να βρεις τις σχέσεις αναλογίας "χρήματα - κομμάτια από κάθε είδος" και να τις παραστήσεις γραφικά στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων. (β) Ο καταστηματάρχης αποφάσισε να διαθέσει το ίδιο ποσό, για κάθε είδος. Βρες πόσα κομμάτια από κάθε είδος θα αγοράσει με τα χρήματα που διαθέτει, χρησιμοποιώντας μόνο τη γραφική παράσταση των σχέσεων που δημιούργησες στο πρώτο ερώτημα της άσκησης.

Α.6.5. Προβλήματα αναλογιών

Για να διαπιστώσουμε, εάν δυο ποσά είναι ανάλογα, χρησιμοποιούμε τα παρακάτω:

	x	y	
	5	7	
· 3	15	21	· 3
· 1/2	2,5	3,5	· 1/2

1. Τον ορισμό των ανάλογων ποσών

Εξετάζουμε αν τα ποσά που μεταβάλλονται είναι τέτοια ώστε: όταν οι τιμές του ενός ποσού πολλαπλασιάζονται, με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.

Για παράδειγμα:

Αν $15 = 5 \cdot 3$ πρέπει $21 = 7 \cdot 3$ και

αν $2{,}5 = 5 \cdot \frac{1}{2}$ πρέπει $3{,}5 = 7 \cdot \frac{1}{2}$

2. Τη σχέση $y = \alpha \cdot x$

Εξετάζουμε αν τα ποσά συνδέονται με μια σχέση αναλογίας.

0,5 € το ένα τριαντάφυλλο

Για παράδειγμα:

Κόστος ανθοδέσμης =
= 0,5 • αριθμός τριαντάφυλλων

3. Τη σχέση $\frac{y}{x} = \alpha$

Εξετάζουμε αν όλες οι αντίστοιχες τιμές των δύο ποσών έχουν σταθερό λόγο.

x	y	$\frac{y}{x} = 2$
3	6	$\frac{6}{3} = 2$
5,5	11	$\frac{11}{5,5} = 2$
….	….	….

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Για να φτιάξουμε γλυκό βύσσινο πρέπει να καθαρίσουμε τα βύσσινα από τα κουκούτσια. Αν καθαρίσουμε 2,5 Kg βύσσινο, παίρνουμε 2 Kg καθαρό βύσσινο. Αν καθαρίσουμε 5 Kg βύσσινο, τι ποσότητα καθαρού βύσσινου θα πάρουμε;

Λύση

Τα ποσά ακαθάριστο βύσσινο και καθαρό βύσσινο είναι ανάλογα.

Συμβολίζουμε με y την άγνωστη ποσότητα καθαρού βύσσινου και δημιουργούμε τον πίνακα αναλογίας.

Βύσσινο με κουκούτσι	2,5 Kg	5 Kg
Καθαρό βύσσινο	2 Kg	y

Θα έχουμε $\frac{2,5}{2} = \frac{5}{y}$ δηλαδή

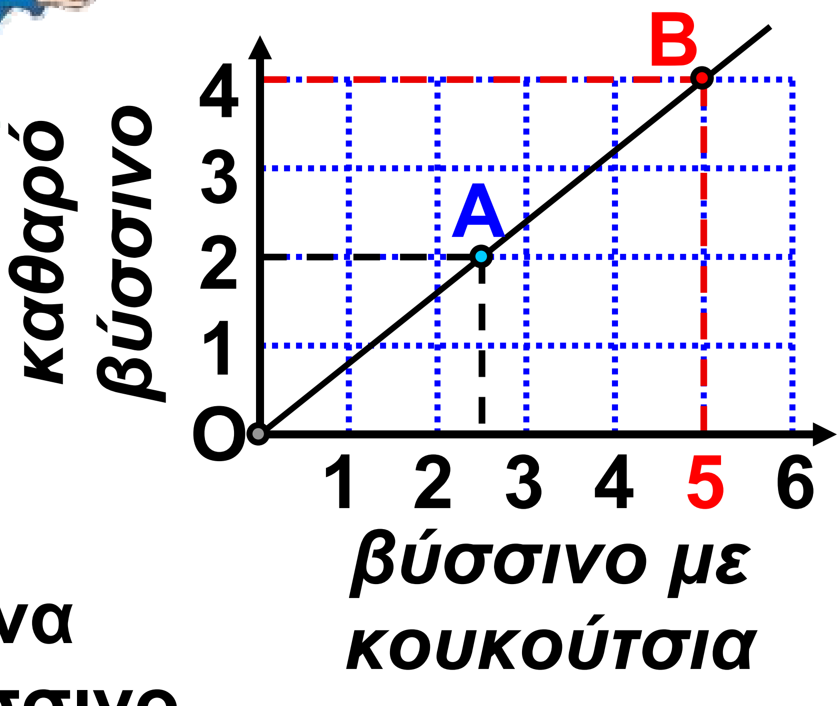
$2,5 \cdot y = 2 \cdot 5$, επομένως $2,5 \cdot y = 10$

συνεπώς, $y = \frac{10}{2,5}$ άρα, $y = 4$ Kg.

Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί και με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης των δύο ανάλογων ποσών, από την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε την ποσότητα καθαρού βύσσινου (τεταγμένη του σημείου Β), από την ποσότητα των 5 Kg, βύσσινου με κουκούτσια (τετμημένη).

Η ημιευθεία, που αναπαριστά τη σχέση αναλογίας του προβλήματος μας, ορίζεται από τα σημεία *Ο(0, 0)* και *A(2,5 , 2)*

Γραφική
επίλυση του προβλήματος



Στον ημιάξονα Οx (κιλά βύσσινο με κουκούτσια) και στο σημείο που βρίσκεται ο αριθμός 5 φέρουμε κάθετη.

Αυτή τέμνει τη γραφική παράσταση της σχέσης αναλογίας, σε σημείο Β. Το σημείο Β έχει τετμημένη 5.

Η τεταγμένη του προκύπτει, αν φέρουμε κάθετη από το Β προς τον ημιάξονα Οy (καθαρό βύσσινο) και είναι 4 Kg.

2. Ένας μεσίτης αγοράζει ένα σπίτι 360.000 € και σκοπεύει να το πουλήσει με κέρδος 28%. Σε ένα πελάτη έκανε έκπτωση 15%, επί της τιμής πώλησης.

(α) Πόσο πουλήθηκε το σπίτι στον πελάτη αυτόν;

(β) Ποιο είναι το ποσοστό κέρδους του μεσίτη, για το σπίτι αυτό;

Λύση

Γνωρίζουμε ότι:

<u>Δύο ποσά που συνδέονται με ποσοστιαία σχέση, είναι ποσά ανάλογα.</u>

(α) Για να βρεθεί η τιμή πώλησης του σπιτιού πρέπει ν' αφαιρεθεί η έκπτωση που έγινε στην αρχική τιμή πώλησης. Δηλαδή:

- **Θα υπολογίσουμε την αρχική τιμή πώλησης του σπιτιού. Στην τιμή κόστους θα έχουμε κέρδος 28%, δηλαδή ένα προϊόν με τιμή κόστους 100 € πωλείται 128 €. Τότε, ο πίνακας αναλογίας θα είναι:**

Τιμή αγοράς	100	360.000
Τιμή πώλησης	128	y

Δηλαδή: $\frac{100}{128} = \frac{360.000}{y}$

Επομένως, $100 \cdot y = 360.000 \cdot 128$

συνεπώς, $y = \frac{360.000 \cdot 128}{100}$.

Άρα, $y = 460.800$ €

• Θα υπολογίσουμε την τιμή πώλησης μετά την έκπτωση που έγινε. Στην τιμή πώλησης έγινε έκπτωση 15%, δηλαδή ένα προϊόν με τιμή πώλησης 100 € πωλείται 85 €. Ας γράψουμε τον πίνακα αναλογίας:

Αρχική τιμή πώλησης	100	460.800
Τιμή πώλησης με έκπτωση 15%	85	y

Δηλαδή: $\frac{100}{85} = \frac{460.800}{y}$

Επομένως, $100 \cdot y = 85 \cdot 460.800$

συνεπώς, $y = \frac{85 \cdot 460.800}{100}$

Άρα, y = 391.680 €. Ο πελάτης αγόρασε το σπίτι 391.680 €.

(β) Για να υπολογίσουμε το ποσοστό κέρδους επί της τιμής αγοράς, πρέπει να ανάγουμε το κέρδος στα

100 €. Το κέρδος του εμπόρου είναι:
391.680 € – 360.000 € = 31.680 €

Έχουμε, λοιπόν, τον παρακάτω πίνακα αναλογίας:

Τιμή αγοράς	**360.000**	**100**
Κέρδος	**31.680**	**x**

Δηλαδή: $\frac{360.000}{31.680} = \frac{100}{x}$

Επομένως, $360.000 \cdot x = 31.680 \cdot 100$

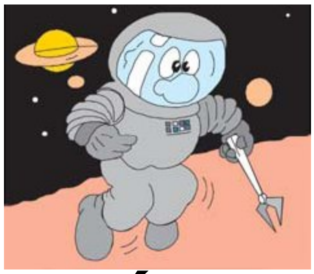
συνεπώς, $x = \frac{31.680 \cdot 100}{360.000}$

Άρα x = 8,8. Το ποσοστό κέρδους του εμπόρου είναι 8,8%.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

***1.** Ένας πάσσαλος ύψους 1,2 m ρίχνει σκιά 3 m. Την ίδια στιγμή ένα δέντρο ρίχνει σκιά 14 m. Αν γνωρίζουμε ότι τα ποσά ύψος – σκιά είναι*

ανάλογα, να βρεθεί το ύψος του δέντρου.



2. Το βάρος στο φεγγάρι και το βάρος στη γη είναι ποσά ανάλογα. Ένας αστροναύτης ζυγίζει στο φεγγάρι 13 Kg και στη γη 78 Kg. Πόσο θα ζυγίζει στο φεγγάρι ένα παιδί, που στη γη έχει βάρος 52 Kg;

3. Από 100 Kg σταφύλια βγαίνουν 80 Kg μούστος. Ένας αμπελουργός θέλει να γεμίσει με μούστο 6 βαρέλια, των 350 Kg το καθένα. Πόσα Kg σταφύλια, της ίδιας ποιότητας, πρέπει να πατήσει;

4. Δύο εργάτες δούλεψαν σε μια οικοδομή και πήραν μαζί 270 €. Ο πρώτος δούλεψε 4 ημέρες και ο δεύτερος 5 ημέρες. Πόσα χρήματα αντιστοιχούν στον καθένα.

5. Το θαλασσινό νερό περιέχει αλάτι σε ποσοστό 3%. Πόσα κιλά θαλασσινό νερό πρέπει να εξατμιστούν για να πάρουμε 60 Kg αλάτι;

6. Ένας γεωργός είχε ένα χωράφι 7 στρέμματα και πήρε και το γειτονικό χωράφι εμβαδού 8 στρεμμάτων, για να φυτέψει καλαμπόκι. Η συμφωνία με το γείτονά του ήταν να του δώσει το 15% της παραγωγής του χωραφιού του. Η συνολική παραγωγή ήταν 14 τόνοι καλαμπόκι. Πόσους τόνους θα πάρει ο γεωργός και πόσους ο γείτονάς του;

7. Αν ψήσουμε 2,5 Kg ωμό κρέας θα μείνει 1,9 Kg ψημένο κρέας.
(α) Πόσο είναι το ποσοστό απώλειας που έχουμε;

(β) Πόσο κρέας πρέπει να ψήσουμε για να έχουμε 2,3 Kg ψημένο κρέας;

8. ***Η μηνιαία κάρτα απεριορίστων διαδρομών στοιχίζει 12 € και η τιμή της θα αυξηθεί, κατά 75%. Το εισιτήριο στο αστικό λεωφορείο είναι 0,7 € και θα αυξηθεί, κατά 50%. Ένας εργαζόμενος παίρνει λεωφορείο, για να πάει και να γυρίσει από τη δουλειά του κάθε ημέρα, για είκοσι φορές το μήνα. Τον συμφέρει η χρήση της κάρτας ή όχι;***

9. ***Ένα κεφάλαιο δίνει τόκο 1.000 € το χρόνο, με επιτόκιο 10%. Αν το επιτόκιο μειωθεί κατά 20%, πόσο τόκο θα δίνει το κεφάλαιο για ένα χρόνο; Πόσο τοις εκατό πρέπει ν' αυξήσουμε το κεφάλαιό μας για να***

έχουμε τον ίδιο τόκο, παρά την μείωση του επιτοκίου;

10. Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα και σχεδίασε διάγραμμα που αντιστοιχεί στα δεδομένα του προβλήματος.

	Οικογένειες	Ποσοστά
ΣΥΝΟΛΟ	200	100%
Με 0 παιδιά	10	
Με 1 παιδιά	40	
Με 2 παιδιά	80	
Με 3 παιδιά	50	
Με 4 παιδιά	15	
Πάνω από 4 παιδιά	5	

Α.6.6. Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Ξεκινούν ταυτόχρονα από μια πόλη:

(α) ένα αυτοκίνητο που τρέχει με ταχύτητα 120 Km/h
(β) ένα αεροπλάνο με 600 Km/h
(γ) μία μοτοσικλέτα με 75 Km/h
(δ) ένα λεωφορείο που τρέχει με 80 Km/h
(ε) ένα ελικόπτερο με 300 Km/h
(στ) ένα ταξί με 100 Km/h
(ζ) μία βέσπα με 60 Km/h και
(η) ένα πούλμαν με 90 Km/h

Το τέλος της διαδρομής είναι μια άλλη πόλη που απέχει 600 Km σε ευθεία γραμμή από την αφετηρία..

- ***Βρες σε πόσες ώρες, θα φθάσει το καθένα στον προορισμό του και***

➢ ***συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα:***

Ταχύτητα σε Km/h							
Χρόνος σε ώρες							

➢ ***Ποια σχέση συνδέει τα μεγέθη της ταχύτητας και του χρόνου;***

➢ ***Τοποθέτησε τα ζεύγη των τιμών που βρήκες, σε ένα σύστημα ημιαξόνων και ένωσε τα σημεία, που ορίζουν τα ζεύγη αυτά, με μία γραμμή. Τι παρατηρείς;***

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Ένα συνεργείο που αποτελείται από 8 εργάτες χρειάζεται 30 ημέρες για να ολοκληρώσει ένα οικοδομικό έργο.

- ***Πόσες ημέρες θα χρειαστεί το συνεργείο, που αποτελείται από 2, 4, 6, 10, 12, 24 ή 48 εργάτες για να τελειώσει το ίδιο έργο;***
- ***Μπορείς να συμπληρώσεις τον παρακάτω πίνακα;***

Εργάτες συνεργείου	***2***	***4***	***6***	***8***
Ημέρες εργασίας				***30***

Εργάτες συνεργείου	***10***	***12***	***24***	***48***
Ημέρες εργασίας				

- ***Τι παρατηρείς για το γινόμενο “εργάτες” • “ημέρες”;***
- ***Τοποθέτησε τα ζεύγη των τιμών του πίνακα, σε ένα σύστημα ημιαξόνων και ένωσε τα σημεία, που ορίζουν τα ζεύγη αυτά, με μία γραμμή. Τι παρατηρείς;***

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει διαστάσεις x και y. Αν γνωρίζεις ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 144 m^2, μπορείς να βρεις δεκατέσσσερις ακέραιες τιμές των διαστάσεών του και να συμπληρώσεις τον παρακάτω πίνακα;

x							
y							

x							
y							

- ***Ποια σχέση συνδέει τις διαστάσεις του ορθογωνίου με το εμβαδόν του;***
- ***Τοποθέτησε τα ζεύγη των τιμών του πίνακα, σε ένα σύστημα ημιαξόνων και ένωσε τα σημεία, που ορίζουν τα ζεύγη αυτά, με μία γραμμή. Τι παρατηρείς;***

➢ ***Ποιο ορθογώνιο, απ’ αυτά που βρήκες, έχει τη μικρότερη περίμετρο;***

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

► **Δύο μεγέθη είναι αντιστρόφως ανάλογα, στην περίπτωση, που η μεταβολή τους είναι τέτοια, ώστε: όταν το ένα μέγεθος πολλαπλασιά-ζεται επί έναν αριθμό, το άλλο διαιρείται με τον ίδιο αριθμό.**

x	y
5	6
15	2
2,5	12

· 3   : 3

· 1/2   : 1/2

► **Όταν δύο ποσά χ και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών τους παραμένει σταθερό: y • x = α, α ≠ 0**

x	y	y · x = 30
5	6	5 · 6 = 30
15	2	15 · 2 = 30
…	…	…

◆ **Στην περίπτωση που α = 1, τα x και y είναι <u>αντίστροφοι</u> αριθμοί.**

● **Τα <u>σημεία</u> που παριστούν τα <u>ζεύγη</u> <u>(x, y)</u> βρίσκονται σε μία <u>καμπύλη</u> <u>γραμμή</u>. Η καμπύλη αυτή ονομάζεται <u>υπερβολή</u>.**

◆ **Η <u>υπερβολή</u> δεν τέμνει ποτέ τους ημιάξονες <u>Ox</u> και <u>Oy</u>, διότι οι συντεταγμένες των σημείων της <u>δεν παίρνουν ποτέ</u> την τιμή 0.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ένας ελαιοπαραγωγός χρησιμο-ποιεί δοχεία των 20 lt, 15 lt, 10 lt και 5 lt, για να συσκευάσει το λάδι

που παράγει. Η παραγωγή του είναι 3.600 lt. Θέλει να συσκευάσει την ίδια ποσότητα λαδιού σε κάθε μία από τις τέσσερις διαφορετικές συσκευασίες.

(α) Πόσα δοχεία χρειάζεται από κάθε είδος;

(β) Πόσο θα κοστίσει η συσκευασία της παραγωγής του αν στοιχίζει 0,4 € το δοχείο των 20 lt, 0,3 € το δοχείο των 15 lt, 0,2 € το δοχείο των 10 lt και 0,1 € το δοχείο των 5 lt;

Λύση

(α) Ο παραγωγός θέλει να συσκευάσει την ίδια ποσότητα λαδιού σε 4 διαφορετικά είδη δοχείων, άρα σε κάθε είδος δοχείου θα συσκευάσει το $\frac{1}{4}$ της παραγωγής του, δηλαδή $\frac{1}{4} \cdot 3600 = \frac{3600}{4} = 900$ lt για κάθε είδος δοχείων.

Συνεπώς, θα ισχύει: x (Αριθμός Δοχείων) • y (Χωρητικότητα) = = 900 lt. Τότε, θα είναι:

για x = 20 lt, είναι: $y = \frac{900}{x} = \frac{900}{20} = 45$

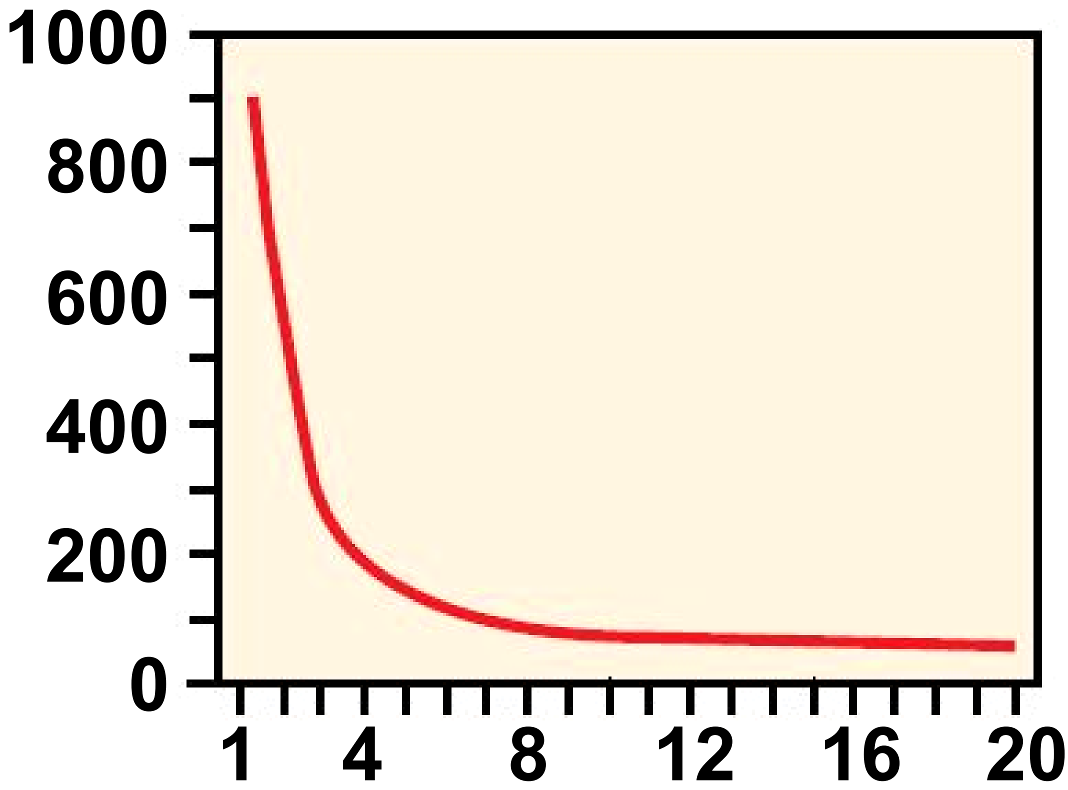
για x = 15 lt, είναι: $y = \frac{900}{x} = \frac{900}{15} = 45$

για x = 10 lt, είναι: $y = \frac{900}{x} = \frac{900}{10} = 45$

για x = 5 lt, είναι: $y = \frac{900}{x} = \frac{900}{5} = 180$

Έτσι, θα έχουμε τον παρακάτω πίνακα και το αντίστοιχο διάγραμμα.

x (χωρητικότητα)	20	15	10	5
y (αριθμός δοχείων)	45	60	90	180



(β) Τα ποσά <u>Αριθμών δοχείων</u> και <u>Κόστος συσκευασίας</u> είναι ανάλογα. Έτσι σε κάθε είδος δοχείου θα έχουμε:

Δοχεία 20 lt	Αριθμός δοχείων	1	45
	Κόστος δοχείων	0,4	ω

Δηλαδή: ω = 45 · 0,4 άρα ω = 18 €

Δοχεία 15 lt	Αριθμός δοχείων	1	60
	Κόστος δοχείων	0,3	ω

Δηλαδή: ω = 60 · 0,3 άρα ω = 18 €

Δοχεία 10 lt	**Αριθμός δοχείων**	**1**	**90**
	Κόστος δοχείων	**0,2**	**ω**

Δηλαδή: ω = 90 · 0,2 άρα ω = 18 €

Δοχεία 5 lt	**Αριθμός δοχείων**	**1**	**180**
	Κόστος δοχείων	**0,1**	**ω**

Δηλαδή: ω = 180 · 0,1 άρα ω = 18 €

Έτσι, το συνολικό κόστος της συσκευασίας θα είναι το άθροισμα του κόστους των δοχείων και των τεσσάρων ειδών. *Συνολικό κόστος =*
= 18 € + 18 € + 18 € +18 € = 72 €

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ποια από τα παρακάτω ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα; Γράψε Σ μπροστά από κάθε σωστή πρόταση και Λ μπροστά από κάθε λάθος.

- *(α) Η βάση και το εμβαδόν ενός τριγώνου, με σταθερό ύψος.*
- *(β) Η παροχή μιας βρύσης και ο χρόνος που χρειάζεται για να γεμίσει μια μπανιέρα*
- *(γ) Το* εμβαδόν *της ρωγμής ενός πλοίου και ο* χρόνος *που απαιτείται, για να γεμίσουν τα αμπάρια του με νερό.*
- *(δ) Ο* αριθμός ατόμων *και το* βάρος του παγωτού *που θα φάνε, από ένα οικογενειακό παγωτό 2 Kg.*
- *(ε) Η* χωρητικότητα *των μπουκαλιών και ο αριθμός μπουκαλιών που χρειαζόμαστε, για να εμφιαλώσουμε 100 lt κρασιού.*
- *(στ) Ο* αριθμός των ατόμων *και οι* σκηνές *των 2 ατόμων που χρειάζονται, για να κατασκηνώσουν.*

2. *Συμπλήρωσε τα παρακάτω κενά:*

(α) Δύο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα και η τιμή του ενός διπλασιάζεται, τότε η αντίστοιχη τιμή του άλλου ………………………………

(β) Η γραφική αναπαράσταση δύο αντιστρόφως ανάλογων ποσών είναι …………….. γραμμή και ονομάζεται …………………………………

3. *Εξέτασε τους παρακάτω πίνακες:*

(α)

x	1	2	3	4
y	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

(β)

x	0,25	0,4	0,5
y	10	6,25	5

(γ)

x	$\frac{1}{100}$	$\frac{2}{58}$	$\frac{7}{10}$	4
y	100	29	$\frac{10}{7}$	$\frac{1}{4}$

(δ)

x	3	6	9
y	9	5	3

Ποιοι από αυτούς είναι πίνακες τιμών αντιστρόφως ανάλογων ποσών;

4. Τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα.
(α) Συμπλήρωσε τον πίνακα :

x	0,2	0,5	0,7	1		
y				3,5	2,5	1,75

x	2,3	3		10	12
y			0,875		

(β) Βρες τα σημεία που παριστάνουν κάθε ζευγάρι τιμών (x, y), σε

κατάλληλο σύστημα ορθογωνίων ημιαξόνων και σχεδίασε την υπερβολή.

5. ***Για την αναδάσωση μιας πλαγιάς, εργάστηκαν 20 εργάτες για 10 ημέρες. Πόσοι εργάτες, ίδιας απόδοσης, χρειάζονται για να αναδασώσουν την έκταση αυτή, σε 8 ημέρες;***

6. ***Σε ένα αγρόκτημα, τοποθέτησαν ντομάτες σε 50 καφάσια, των 12 Kg το καθένα. Πόσα καφάσια των 20 Kg θα χρειαζόντουσαν για να τοποθετήσουν τις ντομάτες. Αν κάθε καφάσι των 12 Kg στοιχίζει 0,28 € και κάθε καφάσι των 20 Kg 0,46 €, ποια συσκευασία τους συμφέρει, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος συσκευασίας του προϊόντος τους;***

7. Το πετρέλαιο που υπάρχει στη δεξαμενή μιας πολυκατοικίας, επαρκεί για 30 ημέρες, όταν καταναλώνονται 80 lt την ημέρα. Όταν το κρύο δυναμώνει, η ημερήσια κατανάλωση αυξάνεται, κατά 20%. Για πόσες ημέρες θα φτάσει το πετρέλαιο;

Ανακεφαλαίωση

Λόγος δύο αριθμών: $\frac{\alpha}{\beta} = \kappa$

Αναλογία είναι η ισότητα δύο λόγων

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$ και

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \gamma}$$

Ποσά ανάλογα

Τα ποσά x και y είναι ανάλογα, τότε και μόνο τότε, αν ισχύει η σχέση:

$\frac{y}{x} = \alpha$ ή $y = \alpha \cdot x$,

όπου α συντελεστής αναλογίας

Πίνακας τιμών:

· 20

· 15

·0,3	x	0	0,3	0,9	1,5	3	3,6	4,5	5,4	6
	y	0	1	3	5	10	12	15	18	20

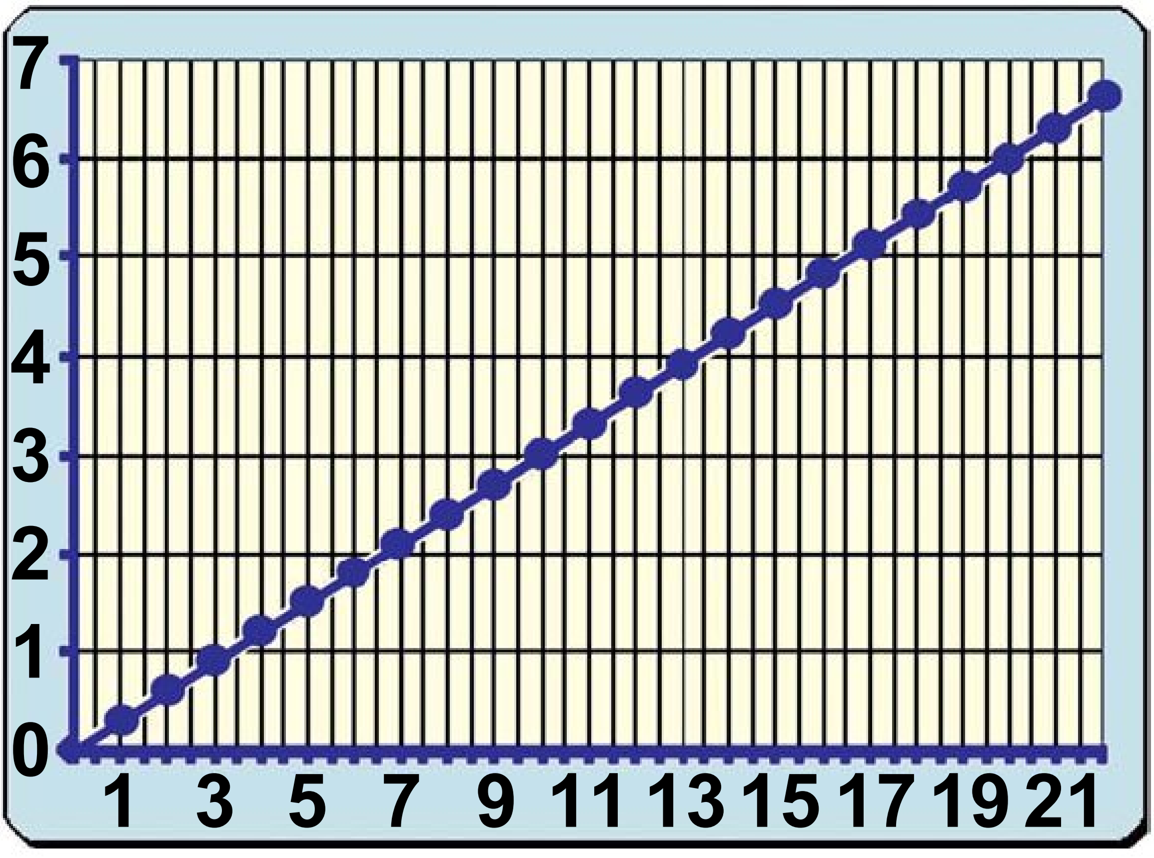
· 15

· 20

y = 0,3 · x ή και
y = 30% · x

Το y είναι ποσοστό του x

Γραφική παράσταση



Κάθε ζευγάρι τιμών (x, y) δύο ανάλογων ποσών αναπαρίσταται από ένα σημείο του επιπέδου με συντεταγμένες το ζευγάρι τιμών (x, y).

Τα σημεία αυτά βρίσκονται πάνω σε μια ημιευθεία, με αρχή το σημείο Ο(0,0)

Κάθε σημείο της ημιευθείας η οποία αναπαριστά μια σχέση αναλογίας, έχει συντεταγμένες που ικανοποιούν αυτήν τη σχέση αναλογίας $y = 0,3 \cdot x$

Ποσά αντιστρόφως ανάλογα

Τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, τότε και μόνο τότε, αν ισχύει η σχέση:

$y \cdot x = \alpha$ ή $y = \dfrac{\alpha}{x}$, όπου $x, y \neq 0$.

Πίνακας τιμών:

: 15

: 10

x	15	5	3	2,5	1,5	1,25	1
y	1	3	5	6	10	12	15

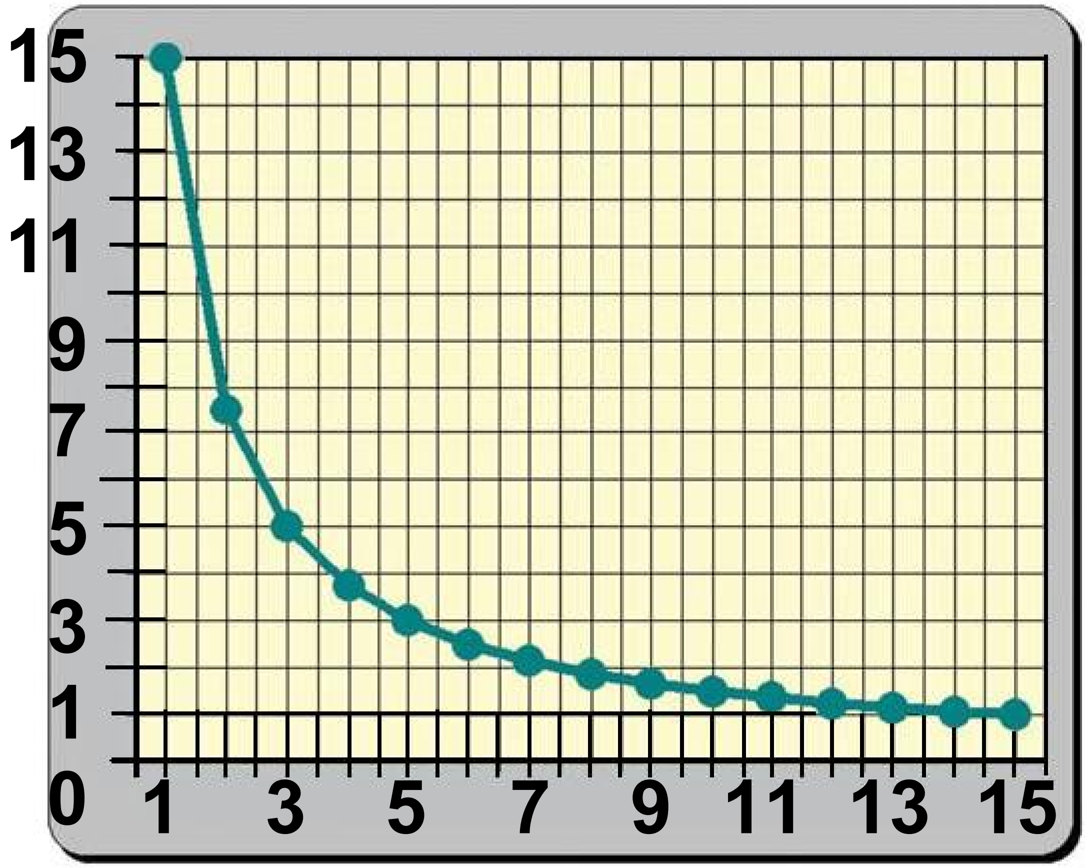
• 10

• 15

Δύο μεγέθη λέγονται <u>αντιστρόφως ανάλογα</u> όταν μεταβάλλονται έτσι ώστε το ένα μέγεθος <u>πολλαπλασιάζεται</u> επί έναν αριθμό όταν το άλλο, ταυτόχρονα, <u>διαιρείται με τον ίδιο αριθμό.</u>

Δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά x και y, δεν μπορούν να πάρουν τιμές ίσες με μηδέν.

Γραφική παράσταση



Τα σημεία που παριστούν τα ζεύγη (x, y) βρίσκονται, σε μια καμπύλη γραμμή.

Η καμπύλη αυτή, που έχει χαρακτηριστικό σχήμα και ιδιότητες, ονομάζεται υπερβολή.

Η υπερβολή δεν τέμνει ποτέ τους ημιάξονες Ox και Oy, διότι οι συντεταγμένες των σημείων της δεν παίρνουν ποτέ την τιμή 0.

Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

Α. Ασκήσεις Σωστού ή Λάθους

Γράψε Σ μπροστά από κάθε σωστή πρόταση και Λ μπροστά από κάθε λάθος

- ☐ **1. Στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά οι τιμές τους έχουν σταθερό γινόμενο**
- ☐ **2. Η παροχή της βρύσης είναι ανάλογη του χρόνου που γεμίζει η μπανιέρα**
- ☐ **3. Στα ανάλογα ποσά οι αντίστοιχες τιμές τους έχουν σταθερό πηλίκο**
- ☐ **4. Το ποσό α είναι ποσοστό του β, τότε τα ποσά α και β είναι ανάλογα**
- ☐ **5. Μια κλίμακα 2:1 αντιστοιχεί σε σμίκρυνση στο μισό του αρχικού σχήματος.**

☐ ***6. Ένας χάρτης περιοχής με κλίμακα 1:1.000 είναι μικρότερος από έναν άλλο χάρτη της ίδιας περιοχής με κλίμακα 1:2.000***

☐ ***7. Αν δύο μοιραστούν 6.000 € με λόγο 2:1 τότε ο ένας θα πάρει 3.000 €***

Β. Ασκήσεις Συμπλήρωσης κενού

1. Το πηλίκο των μέτρων δύο ομοειδών μεγεθών, όταν έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα, λέγεται

……………………………………

2. Ο λόγος της απόστασης δύο σημείων μιας εικόνας προς την πραγματική απόσταση των δύο αντίστοιχων σημείων του αντικειμένου ονομάζεται

………………………………………

***3.** Αν πενταπλασιάσουμε την τιμή ενός από δύο ανάλογα ποσά και η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού*

…………………………………………

***4.** Το πηλίκο των αντίστοιχων τιμών δύο ανάλογων ποσών ονομάζεται*

……………………………………….

***5.** Η γραφική αναπαράσταση μιας σχέσης αναλογίας είναι* **……………** *γραμμή που περνάει από το σημείο*

………………………………..

***6.** Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα ανάλογων ποσών*

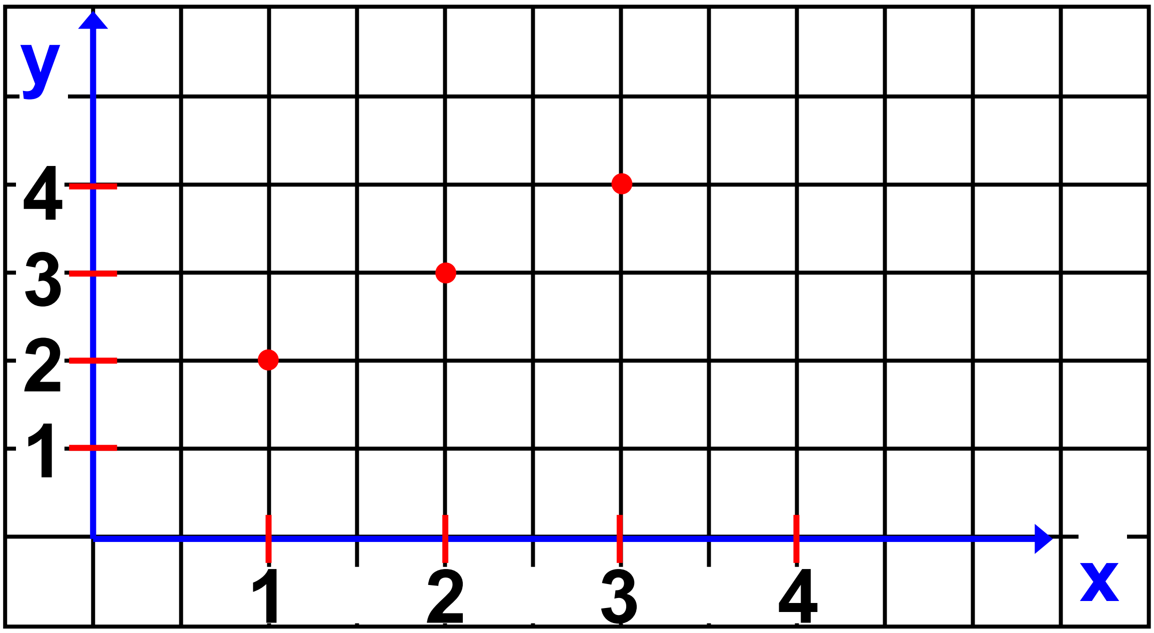
x	2	4		15	16
y		15	30		

7. Δύο ποσά των οποίων το γινόμενο των δύο αντίστοιχων τιμών είναι σταθερό λέγονται ………………………..

8. Συμπλήρωσε τον παρακάτω πίνακα των αντιστρόφως ανάλογων ποσών:

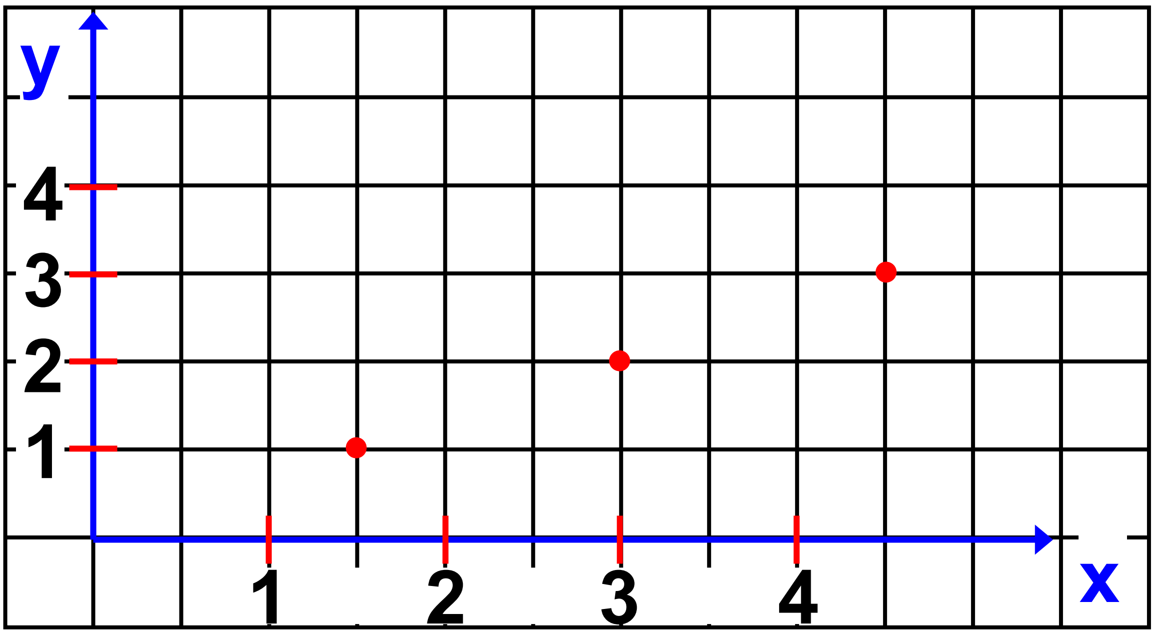
x	2			4	8
y	8	16	32		

9. Συμπλήρωσε, στην επόμενη σελίδα, τον πίνακα με τις συντεταγμένες των σημείων των γραφικών παραστάσεων, που έχουν σημειωθεί έντονα, προσπάθησε να βρεις τον αντίστοιχο τύπο και να εκτιμήσεις αν αυτός αφορά σχέση αναλογίας.



x			
y			

y = ...



x			
y			

y = ...

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Α΄ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ – ΑΛΓΕΒΡΑ

Με απόφαση της Ελληνικής Κυβέρνησης τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου και του Λυκείου τυπώνονται από τον Οργανισμό Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν βιβλιόσημο προς απόδειξη της γνησιότητάς τους. Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δε φέρει βιβλιόσημο, θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7, του Νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946, 108, Α΄).

ΒΙΒΛΙΟΣΗΜΟ